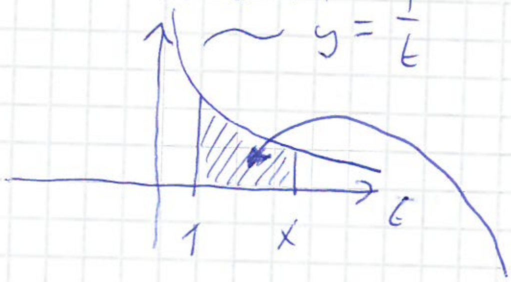
TATA68, Fö 6 2017 (1)

Logaritm, exponentialfunktion och potensfunktion

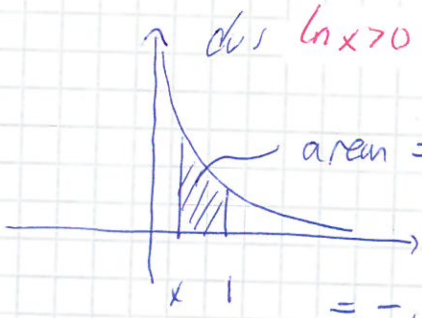
Den naturliga logaritmen, ln, definieras som

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$



om $x > 1$ så är $\ln x$ = arean

dvs $\ln x > 0$ då $x > 1$



arean $= \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

om $0 < x < 1$ så är

$\ln x = -$arean dvs $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$

Definitionen förutsätter att integralen definierats, men det görs i envariabelanalyskursen

---

Ur definitionen kan man härleda ett antal samband

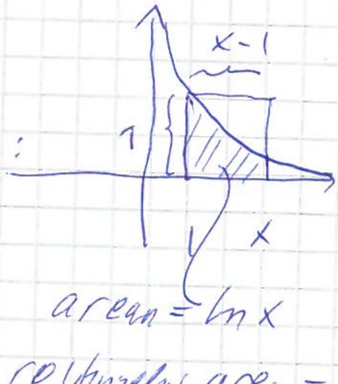
(a) $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbb{R}$

(b) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ om $x > 0, y > 0$

Här behöver vi integralegenskaper

(c) $\ln x < x - 1$ då $x > 0, x \neq 1$ ty

om $x > 1$:



arean $= \ln x$

rektangelns area $= x - 1$

motsv. figur kan ritas då $0 < x < 1$?

(d) $\ln 1 = 0$ $\left(\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0\right)$

(e) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ då $x > 0, y > 0$

$\left(\text{ty } \ln x = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln \frac{x}{y} + \ln y\right)$

(f) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $x > 0$

$\left(\text{ty } \ln \frac{1}{x} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln x = -\ln x\right)$

(g) $\ln x^p = p\ln x$ om p är heltal och $x>0$

(t.ex. om $p>0$: $\ln x^p = \ln(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{p\text{ st}}) = \underbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}_{p\text{ st}} = p\ln x$,

<u>OBS</u>: (c) och (f) tillsammans ger

$$-\ln x = \ln\frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \quad \text{så } \ln x > \frac{x-1}{x}$$

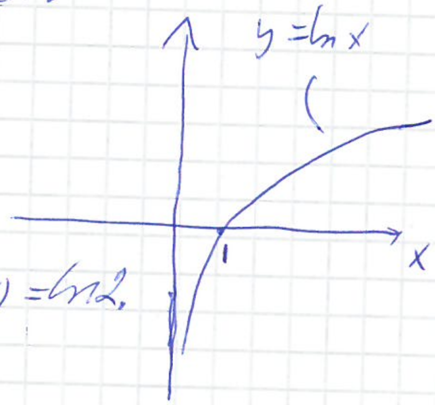
om $\frac{1}{x}>0$, $\frac{1}{x}\neq 1$
dvs om $x>0$, $x\neq 1$

Alltså är $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ då $x>0$, $x\neq 1$.

<u>OBS</u>: Om $x_2 > x_1 > 0$ så är $\ln x_2 - \ln x_1 =$

$$= \ln\underbrace{\frac{x_2}{x_1}}_{>1} > 0 \text{ dvs } \ln x_2 > \ln x_1, \text{ dvs}$$

ln är en strängt växande funktion
så ln är injektiv



ex 1) Lös ekvationen $2\ln(3-x) - \ln(15-x) = \ln 2$.

<u>Lösn</u>: Uttrycken är definierade då

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 15-x>0 \end{cases} \text{ dvs då } \underline{x<3}. \text{ För dessa } x \text{ är}$$

$$2\ln(3-x) - \ln(15-x) = \ln 2 \iff \ln(3-x)^2 - \ln(15-x) = \ln 2$$

$$\iff \ln(3-x)^2 = \ln 2 + \ln(15-x) \iff \ln(3-x)^2 = \ln(2(15-x))$$

$$\iff (3-x)^2 = 2(15-x) \iff \begin{cases} x=7 \\ \text{eller} \\ x=-3 \end{cases} \quad \text{(övn)}$$

eftersom ln är injektiv

lös andragrads-ekvationen

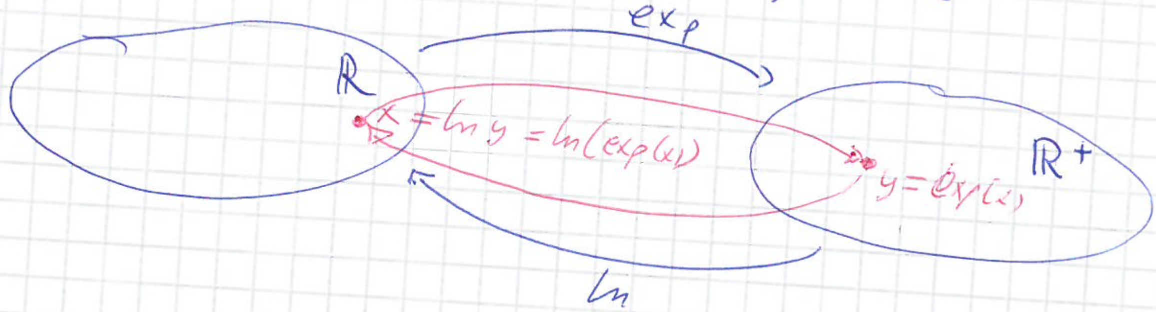
Men vi hade villkoret $x<3$, således är det bara $x=-3$ som uppfyller ekvationen. $\therefore$ Enda lösningen är $x=-3$

Kontroll: Sätt in $x=-3$ i ursprungliga ekvationen (3)

Eftersom ln är strängt växande så har $\square$
den en invers funktion. Denna betecknas exp.
Således gäller $\quad y = \exp(x) \iff x = \ln y$

$$D_{\exp} = V_{\ln} = \mathbb{R} \quad , \quad V_{\exp} = D_{\ln} =]0,\infty[= \mathbb{R}^+$$

Vi har även sambanden $\quad \exp(\ln x) = x \;, \; x>0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ln(\exp(x)) = x \;, \; x \in \mathbb{R}$



Speciellt definierar vi talet e som $e = \exp(1)$,
dvs $\ln(e) = 1$

Av logaritmlagarna följer att $\ln(e^p) = p\ln e = p$
om p är heltal, dvs $\underline{\exp(p)} = \exp(\ln(e^p)) = \underline{e^p}$
då p är heltal.

Vi inför beteckningen $e^x = \exp(x)$.

Några räknelagar

* $e^0 = 1$ och $e^1 = e$ $\quad (\exp(0)=1$ och $\exp(1)=e)$
* $\ln(e^x) = x$ för alla x
* $e^{\ln x} = x$ då $x>0$
* $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Ty $\ln(e^{x+y}) = \ln(\exp(x+y)) =$
$= x+y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) =$
$= \ln(\exp(x)\cdot\exp(y)) = \ln(e^x \cdot e^y)$
och ln är injektiv

* $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ Övn.

* $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ följer av tidigare lagar.

* $(e^x)^p = e^{px}$ om p är heltal

ex 2) Lös $\frac{e^{2x}-5}{e^{2x}-3} = 2e^{-x}$

Lösn: $\frac{e^{2x}-5}{e^{2x}-3} = 2e^{-x} \Longleftrightarrow \frac{(e^x)^2-5}{(e^x)^2-3} = \frac{2}{e^x}$.

Sätt $t = e^x > 0$, så fås

$$\frac{t^2-5}{t^2-3} = \frac{2}{t} \Longleftrightarrow t(t^2-5) = 2(t^2-3) \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$. Prövning ger att $t=1$ är en lösning. Polynomdivision och faktorisering ger därefter att $t^3-2t^2-5t+6=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (t-1)(t-3)(t+2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \\ \text{el} \\ t=-2 \end{cases}$$

men $t>0$ så enda lösningarna är $t=1$ och $t=3$.

$t=1$ ger $e^x=1$ dvs $x = \ln 1 = 0$

$t=3$ ger $e^x = 3$ dvs $x = \ln 3$

Alltså är $x=0$ eller $x = \ln 3$. $\square$

ex 3) Bestäm D_f och ev. invers till

$$f(x) = \sqrt{\ln(x+7) - \ln(1-2x)}.$$

Lösn: Villkor för att $f(x)$ ska vara definierad är

$$\begin{cases} x+7>0 & \text{, dvs } x>-7 \\ 1-2x>0 & \text{, dvs } x<\frac{1}{2} \\ \ln(x+7)-\ln(1-2x)\geq 0 & \text{, dvs } \ln(x+7)\geq\ln(1-2x) \Leftrightarrow \end{cases}$$

ln är str. väx.

$$\Leftrightarrow x+7\geq 1-2x \Leftrightarrow 3x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq -2.$$

Sammantaget ser vi att $D_f=\{x: -2\leq x<\frac{1}{2}\}$

f^{-1}? Sätt $y=f(x)$ och försök lösa ut x! För $x\in D_f$ fås

$$y=\sqrt{\ln(x+7)-\ln(1-2x)}=\sqrt{\ln\left(\frac{x+7}{1-2x}\right)}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\ln\frac{x+7}{1-2x} \underset{\text{exp injektiv}}{\Longleftrightarrow} e^{y^2}=\frac{x+7}{1-2x} \Leftrightarrow (1-2x)e^{y^2}=x+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2e^{y^2}x=e^{y^2}-7 \Leftrightarrow x(2e^{y^2}+1)=e^{y^2}-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{e^{y^2}-7}{2e^{y^2}+1}}_{\text{högst ett } x \text{ till varje } y, \text{ så } f^{-1}\ \exists}=f^{-1}(y)$$

Alltså är f injektiv, och $f^{-1}(x)=\dfrac{e^{x^2}-7}{2e^{x^2}+1}$

$D_f=[-2,\frac{1}{2}[$ $\square$

Slutligen definierar vi potensfunktionen $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ då $x>0$

(ty $x^p=(e^{\ln x})^p=e^{p\ln x}$ om p heltal)

Exempelvis fås då att $x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}\cdot x^{\beta}$

$$\left(\text{ty } x^{\alpha}\cdot x^{\beta}=e^{\alpha\ln x}\cdot e^{\beta\ln x}=e^{\alpha\ln x+\beta\ln x}=e^{(\alpha+\beta)\ln x}=\right.$$
$$\left.=x^{\alpha+\beta}\right)$$

Vi får även att $x^{1/2} = \sqrt{x}$ då $x > 0$, ty

$$x^{1/2} > 0 \text{ och } (x^{1/2})^2 = \left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)^2 = e^{\ln x} = x.$$

ex 4) Lös ekv $x^{1/2} - x^{1/3} = 4$.

Lösn. Vi noterar först att $x > 0$ för att $x^{1/2}$ och $x^{1/3}$ ska vara definierade.

Ska vara

$$x^{1/2} - x^{1/3} = x^{3/6} - x^{2/6} = (x^{1/6})^3 - (x^{1/6})^2 = 4.$$

Låt $t = x^{1/6} > 0$. Då fås $t^3 - t^2 = 4 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 4 = 0$

Vi ser att $t = 2$ är en lösning. Polynomdivision ger

$$t^3 - t^2 - 4 = (t-2)(t^2 + t + 2) = (t-2)\underbrace{\left(\left(t + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4}\right)}_{>0}$$

så $t^3 - t^2 - 4 = 0$ har bara lösningen $t = 2$

Alltså är $x^{1/6} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

$\therefore$ $x = 64$ är enda lösningen.