Mer trigonometri, hjälpvinkelomskrivning

Vi kan skriva om uttrycket $A\sin x + B\cos x$ på formen $C\sin(x+v)$ (eller $D\cos(x+v)$)

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos v}\sin x + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin v}\cos x\right)$$

Det finns v så att $\begin{cases}\cos v = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin v = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{cases}$, ty $\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$

Alltså är $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos v \sin x + \sin v \cos x) =$

$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+v)$, där $\begin{cases}\cos v = A/\sqrt{A^2+B^2} \\ \sin v = B/\sqrt{A^2+B^2}\end{cases}$.

ex1) Lös ekvationen $\sin 3x - \cos 3x = 1$, $-\pi \le x \le \pi$.

Lösn: Vi tar först fram alla lösningar till ekvationen.

$$\sin 3x - \cos 3x = 1\cdot \sin 3x - 1\cdot\cos 3x = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos v}\sin 3x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin v}\cos 3x\right)$$

$$= \left/ \begin{array}{l}\cos v = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin v = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array} \text{ ger t.ex } v = -\frac{\pi}{4} \right/ =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos 3x\right) = \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Således är $\sin 3x - \cos 3x = 1 \iff \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff$

$$\iff \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + n2\pi \end{cases} \iff$$

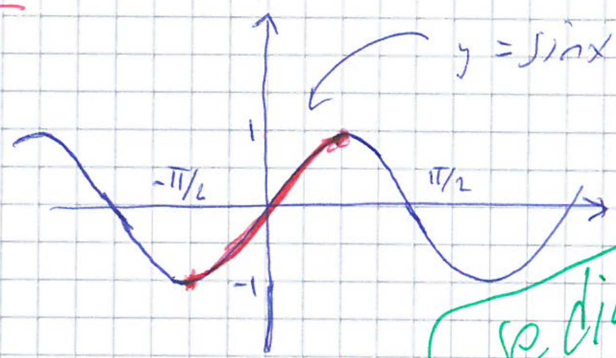
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x = \pi + n2\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (n \text{ heltal}).$$

Av dessa ligger $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$, $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ och $\frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{2\pi}{3} = -\pi$ i $[-\pi, \pi)$

Svar: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}$ eller $-\pi$.

Arcusfunktioner "inverser till trigonometriska funktioner"

Betrakta sambandet $y = \underbrace{\sin x}_{f(x)}$



Uppenbarligen är sambandet ej omvändbart,

t.ex är $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

se diabild med invers

Däremot är restriktionen $\begin{cases} y = \sin x \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ det,

eftersom $f(x) = \sin x$ är strängt monoton på $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Def $\arcsin x$ är det tal y som uppfyller

$$\begin{cases} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ex 2) Vad är $\arcsin \frac{1}{2}$?

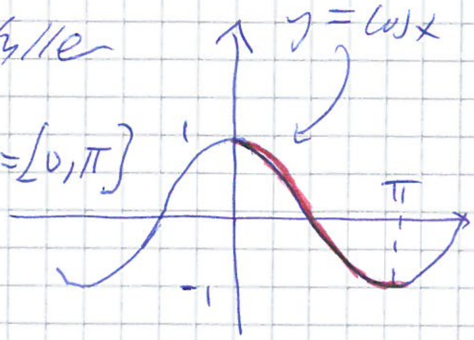
$$x = \arcsin\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \quad \text{dvs} \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Notera att $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, $V_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

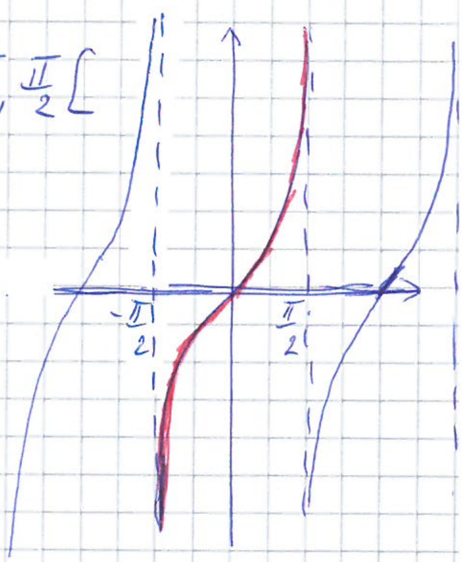
Def $\arccos x$ är det tal y som uppfyller

$$\begin{cases} \cos y = x \\ 0 \le y \le \pi \end{cases} . \qquad D_{\arccos} = [-1, 1],\ V_{\arccos} = [0, \pi]$$

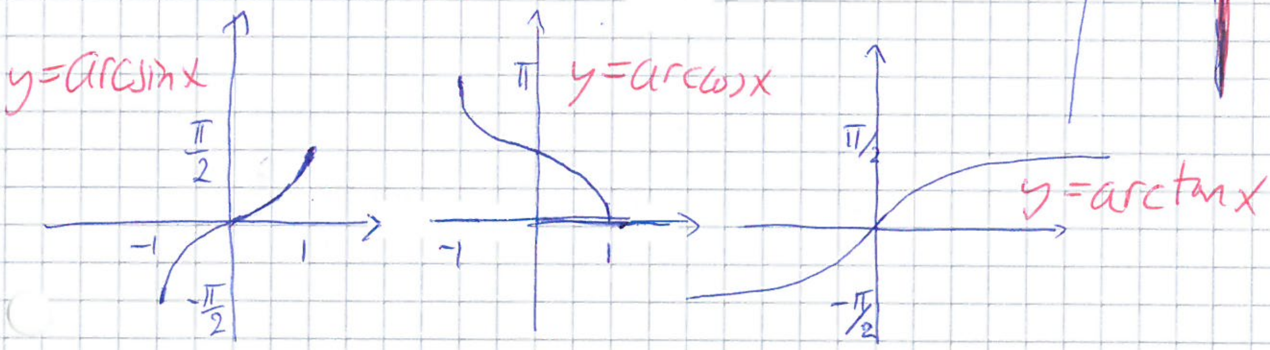


Def $\arctan x$ är det tal y som uppfyller

$$\begin{cases} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad D_{\arctan} = \mathbb{R},\ V_{\arctan} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



Graferna



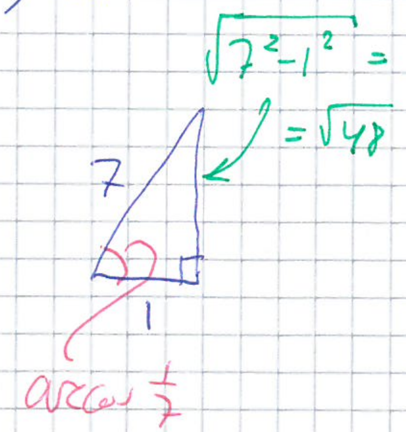
ex 3) Vad är $\sin(\arccos\frac{1}{7})$?

Lösn $0 < \arccos\frac{1}{7} < \frac{\pi}{2}$, ty $0 < \frac{1}{7} < 1$, så

$\arccos\frac{1}{7}$ kan ses i en rätvinklig triangel,

så $\arccos\frac{1}{7} = \arcsin\frac{\sqrt{48}}{7}$. Alltså är

$\sin(\arccos\frac{1}{7}) = \sin(\arcsin\frac{\sqrt{48}}{7}) = \frac{\sqrt{48}}{7}$.



Alt. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, så $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$.

Alltså är $\sin(\arccos\frac{1}{7}) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{1}{7})} = \pm\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2} =$

$= \pm\frac{\sqrt{48}}{7}$, men $0 < \arccos\frac{1}{7} < \frac{\pi}{2}$ så

$\sin(\arccos\frac{1}{7}) > 0$ $\therefore$ $\sin(\arccos\frac{1}{7}) = \frac{\sqrt{48}}{7}$.

<u>OBS</u>:

$\sin(\arcsin x) = x$, då $x \in [-1,1]$

$\cos(\arccos x) = x$, — " —

$\tan(\arctan x) = x$, för alla x

$\arcsin(\sin x) = x$, då $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos(\cos x) = x$, då $x \in [0, \pi]$

$\arctan(\tan x) = x$, då $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(titta i graferna, så förstår du varför)

ex 4) Vad är $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{7})$? $\frac{5\pi}{7} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Försök hitta en annan vinkel $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sådan att $\sin v = \sin\frac{5\pi}{7}$?

$$\sin v = \sin\frac{5\pi}{7} \iff \begin{cases} v = \frac{5\pi}{7} + n2\pi \\ \text{eller} \\ v = \pi - \frac{5\pi}{7} + n2\pi \end{cases} \iff$$

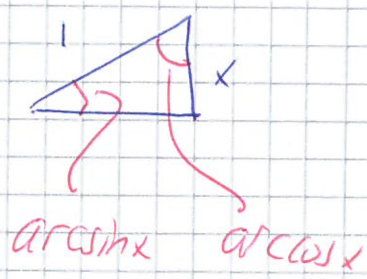
$$\iff \begin{cases} v = \frac{5\pi}{7} + n2\pi \\ \text{eller} \\ v = \frac{2\pi}{7} + n2\pi \end{cases}$$

och av dessa är det endast $v = \frac{2\pi}{7}$ som $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Alltså är $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{7}) = \arcsin(\sin\frac{2\pi}{7}) = \frac{2\pi}{7}$.

<u>OBS:</u> Om $0<x<1$, så visar följande figur

att $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$



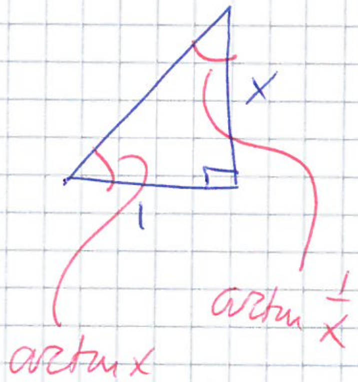
Man kan visa att

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

för alla $x \in [-1,1]$ (se boken, sid 110-111)

<u>OBS:</u> Om $x>0$ så visar följande figur

att $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$



Om $x<0$ så blir

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$,

ty arctan är udda funktion.

ex 5) Lös ekv $\sin x = \frac{1}{3}$, $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$

<u>Lösn</u> $\sin x = \frac{1}{3}$ har en lösning $x = \arcsin \frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3} \in [-1,1]$

Så $\sin x = \frac{1}{3} \iff \sin x = \sin(\arcsin \frac{1}{3}) \iff$

$$\iff \begin{cases} x = \arcsin \frac{1}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + n2\pi \end{cases}$$

Eftersom $0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$

så följer att av alla dessa är det bara $x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi$

som ligger i $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$ (övning),

så $x = 3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$

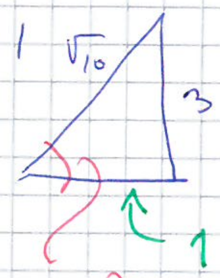
ex 6) Förenkla $v = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \arctan 2$.

Vi börjar med att beräkna $\tan v$ (eller $\sin v$ eller $\cos v$)

$$\tan v = \tan\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \arctan 2\right) =$$

$$= \frac{\tan\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \tan(\arctan 2)}{1 - \tan\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\tan(\arctan 2)} = \Bigg/$$

$0 < \frac{3}{\sqrt{10}} < 1$



$\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} = \arctan 3 \Big/$

$$= \frac{3+2}{1-3\cdot 2} = -1, \quad \text{dvs } \tan v = -1,$$

så $v = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n. Vilket?

$$\begin{cases} 0 < \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{så } 0 < v < \pi.$$

Alltså är $\begin{cases} v = -\frac{\pi}{4} + n\pi \\ 0 < v < \pi \end{cases}$, dvs $v = \frac{3\pi}{4}$.