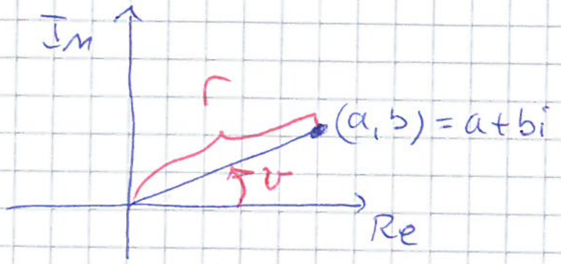
Komplexa tal på polär form



$$z = a+bi = r\cos v + i\,r\sin v = r(\cos v + i\sin v)$$

där $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

och $v = \arg(z)$ (vinkeln, ej entydig)

Def: $e^{iv} = \cos v + i\sin v$, då v är reellt !?

Varför denna beteckning?

(1) $e^{-iv} = \dfrac{1}{e^{iv}}$, ty $\dfrac{1}{e^{iv}} \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{\cos v + i\sin v} = \dfrac{\cos v - i\sin v}{\underbrace{\cos^2 v + \sin^2 v}_{1}} \overset{\text{cos jämn, sin udda}}{=} \cos(-v) + i\sin(-v) \overset{\text{def}}{=} e^{-iv}$

(2) $e^{iu}\cdot e^{iv} = e^{i(u+v)}$, ty $e^{iu}\cdot e^{iv} \overset{\text{def}}{=} (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) =$

$= \cos u\cos v - \sin u\sin v + i(\sin u\cos v + \cos u\sin v) =$

$\underset{\text{add-lagar}}{=} \cos(u+v) + i\sin(u+v) \underset{\text{def}}{=} e^{i(u+v)}$

(3) $(e^{iv})^n = e^{inv}$ (upprepa (2) n ggr)

Således uppfyller e^{iv} de vanliga exponential-räknelagarna.

$(e^{iv})^n = e^{inv}$ kallas **de Moivres formel**

Kombinerar vi $\begin{cases} e^{iv} = \cos v + i\sin v \\ e^{-iv} = \cos v - i\sin v \end{cases}$ så får vi

Eulers formler $\begin{cases} \cos v = \dfrac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} \\ \sin v = \dfrac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i} \end{cases}$

Med hjälp av deMoivres och Eulers formler kan vi plocka fram en del trigonometriska samband (men det blir inte bevis för sambanden)

ex 1) Skriv talet $z = 1 - i\sqrt{3}$ på polär form.

<u>Lösn.</u> $$1 - i\sqrt{3} \underset{\text{bryt ut beloppet}}{=} 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2(\cos v + i \sin v)$$

där $\begin{cases} \cos v = 1/2 \\ \sin v = -\sqrt{3}/2 . \end{cases}$ $\quad \cos v = \frac{1}{2} \iff v = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$

och av dessa är det $v = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$ som uppfyller sambandet $\sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alltså är $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + n2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + n2\pi\right)\right) =$

$$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + n2\pi\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad \left(e^{in2\pi} = 1\right)$$

ex 2) Skriv $\cos x \cdot \sin y$ som en summa.

<u>Lösn:</u> $$\cos x \cdot \sin y \underset{\text{Euler}}{=} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{ix} \cdot e^{-iy} + e^{-ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy}}{4i} =$$

$$= \frac{e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} - e^{-i(x+y)}}{4i} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} - \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y) \right)$$

ex 3) Uttryck $\sin 3x$ m.h.a $\sin x$ och/eller $\cos x$.

Lösn $\sin 3x = \operatorname{Im}(\cos 3x + i\sin 3x) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(e^{3ix}) =$

$$\underset{\text{deMoivre}}{=} \operatorname{Im}\left((e^{ix})^3\right) \underset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \underset{\text{binomialsats}}{=}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\cos^3 x + 3\cos^2 x\cdot(i\sin x) + 3\cos x\cdot(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left((\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)\right) =$$

$$= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x,$$

dvs $\sin 3x = 3\underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)}\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

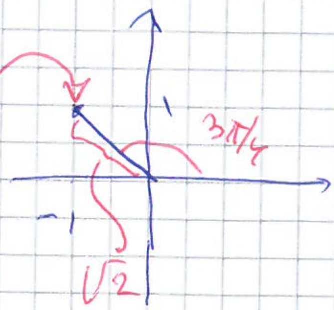
OBS: Vi får dessutom att

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\underbrace{\sin^2 x}_{(1-\cos^2 x)} = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

(alt. lösn: $\sin 3x = \dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} = \dfrac{(e^{ix})^3 - (e^{-ix})^3}{2i}$ = utv. ..., ovan)

Med hjälp av polär form kan vi nu lösa den binomiska ekvationen $z^n = w$ (w = konstant)

ex4) Lös $z^3 = -1+i$.



Lösn: Skriv z och $-1+i$ på polär form

$-1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Låt $z = re^{iv}$,

där $r \geq 0$ och v är reellt.

Då fås $z^3 = (re^{iv})^3 = r^3(e^{iv})^3 \underset{\uparrow}{=} r^3 e^{3iv}$

deMoivre

så $z^3 = -1+i \iff r^3 e^{3iv} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$

Identifiera absolutbelopp och argument:

$$\begin{cases} \text{Belopp}: & r^3 = \sqrt{2} \\ \text{Argument}: & 3v = \frac{3\pi}{4} + n2\pi \end{cases} \iff$$

OBS: argumentet ej entydigt, kan addera $n2\pi$ och få samma komplexa tal.

$$\iff \begin{cases} r^3 = 2^{1/2} \\ 3v = \frac{3\pi}{4} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2^{1/6} \\ v = \frac{\pi}{4} + n\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

där n är heltal, men det räcker med

$n = 0, 1, 2$ (tre i rad) för att få alla olika lösningar

till tredjegradsekvationen

Alltså är
$$\begin{cases} z_1 = 2^{1/6} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 = 2^{1/6} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{1/6} e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_3 = 2^{1/6} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{1/6} e^{i\frac{19\pi}{12}} \end{cases}$$

<u>Allmänt</u> För att lösa $z^k = w$; ← given konstant.

Sätt $z = re^{iv}$ och skriv w på polär form, $w = \rho e^{i\varphi}$,

så får $(re^{iv})^k = \rho e^{i\varphi} \iff r^n e^{inv} = \rho e^{i\varphi}$.

Identifiering av absolutbelopp ger då

$$\begin{cases} \text{abs:} & r^k = \rho \\ \text{arg:} & kv = \varphi + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \rho^{1/k} \\ v = \dfrac{\varphi}{k} + \dfrac{n 2\pi}{k}, \quad n = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

<u>OBS:</u> Tolkning av $z \cdot w$, när z och w är komplexa tal.

Låt $z = r_1 e^{i\alpha}$, $w = r_2 e^{i\beta}$. Då blir

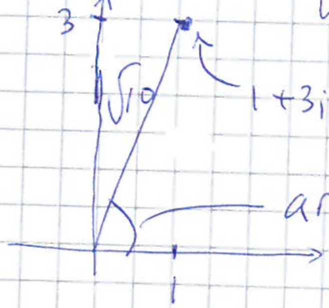
$$\underbrace{z \cdot w}_{re^{i\varphi}} = r_1 e^{i\alpha} \cdot r_2 e^{i\beta} = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$$

så $\begin{cases} r = r_1 r_2 \\ \varphi = \alpha + \beta + n 2\pi \end{cases}$ dvs $\begin{cases} |zw| = |z| \cdot |w| \\ \arg(zw) = \arg z + \arg w \end{cases}$

(arg ej entydigt)

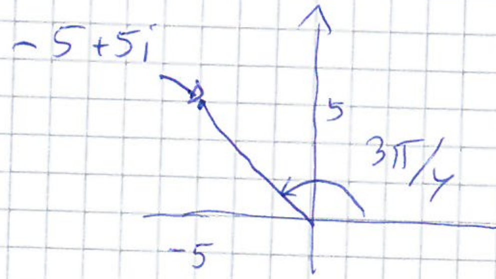
ex 5) Beräkna $v = \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{10}} + \arctan 2$ (ex 6 på Fö 7) på nytt sätt

<u>Lösn</u>



$\arcsin \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \arg(1+3i)$

$\arctan 2 = \arg(1+2i)$



$$v = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \arctan 2 = \arg(1+3i) + \arg(1+2i) = \arg\big((1+3i)(1+2i)\big)$$

$$= \arg(-5+5i) = \frac{3\pi}{4} + n 2\pi \text{ för något heltal } n.$$

Inställningen $0 < \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{10}} < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \arctan 2 < \dfrac{\pi}{2}$ ger

$0 < v < \pi$, så endast $v = \dfrac{3\pi}{4}$ uppfyller det villkoret.

$$\therefore \; v = \frac{3\pi}{4}.$$