Bevis för några satser om polynomekvationer

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Sats

Om $P(z)$ har reella koefficienter och om
$\alpha = a+bi$ är ett nollställe till P (där a, b reella)
så är $\overline{\alpha} = a-bi$ ett nollställe till P.

Bevis Vi ska visa att $P(\overline{\alpha})=0$ om $P(\alpha)=0$.

$$P(\overline{\alpha}) = a_n \cdot (\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\alpha} + a_0 =$$

$$= a_n \cdot (\overline{\alpha^n}) + a_{n-1} \cdot (\overline{\alpha^{n-1}}) + \dots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 =$$

$$= \text{/ } a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \text{ och } a_0 \text{ är reella /} =$$

$$= \overline{a_n} \cdot (\overline{\alpha^n}) + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{\alpha^{n-1}}) + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n \cdot \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot \alpha} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha + a_0} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Klart.

Sats Om $P(z)$ har heltalskoefficienter
och om $\alpha = \frac{p}{q}$ är ett nollställe till P,

där p och q är heltal utan gemensamma faktorer,
så är p en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Bevis $\alpha = \frac{p}{q}$ är ett nollställe till P, dvs

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \iff$$

$$\iff \text{/ multiplicera med } q^n \text{ i båda led /} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$$

Flyttar vi alla termer som innehåller p till högerledet så ser vi att

$$a_0 \cdot q^n = -\left(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1}\right) =$$

$$= \underbrace{-\left(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}\right)}_{\text{heltal}} \cdot p$$

Alltså är $a_0 \cdot q^n$ delbart med p. Men q och p har inga gemensamma faktorer, alltså måste a_0 vara delbart med p, dvs p är en faktor i a_0.

Flyttar vi istället alla termer som innehåller q till högerledet, så får vi på motsvarande sätt att a_n är delbart med q, dvs q är en faktor i a_n

Klart.