Lös ekvationen $|3x+2| - 4 \cdot |2-x| = 3-x$

Lösning

Vi vill bli av med beloppstecknen, och det kan vi bli genom att göra falluppdelning. * Se OBS i slutet av lösningen!

Kom ihåg att $|a| = \begin{cases} a, & \text{om } a \geq 0 \\ -a, & \text{om } a \leq 0 \end{cases}$

(Så $|a| \geq 0$ för alla a). Ur definitionen får vi att

$$|3x+2| = \begin{cases} 3x+2, & \text{om } 3x+2 \geq 0 \text{ dvs om } x \geq -\frac{2}{3} \\ -(3x+2), & \text{om } 3x+2 \leq 0 \text{ dvs om } x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

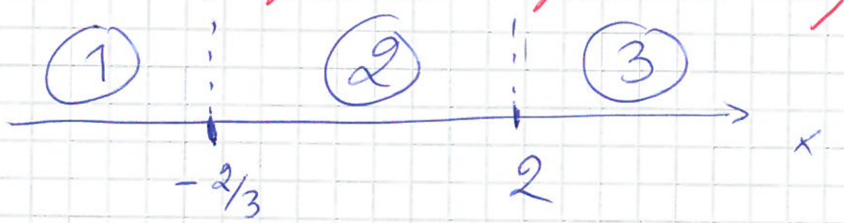
Sätt $a = 3x+2$ i $|a|$

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & \text{om } 2-x \geq 0 \text{ dvs om } x \leq 2 \\ -(2-x), & \text{om } 2-x \leq 0 \text{ dvs om } x \geq 2 \end{cases}$$

Sätt $a = 2-x$ i $|a|$

Vi ser då att de båda beloppen kan uttryckas utan belopp, men uttrycken blir olika beroende på vad x är. Och tydligen är det $x = -\frac{2}{3}$ och $x = 2$ som är punkter där uttrycken skiftar.

Rita ut dessa "brytpunkter" på tal-linjen!



Vi ser då att tal-linjen delas i tre delar

1. $x \leq -\frac{2}{3}$
2. $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$
3. $x \geq 2$

I vart och ett av dessa intervall kan vi bli av med beloppen!

Alltså får vi titta på tre olika fall. Det blir en del att göra, men i vart och ett av intervallen får vi ett mycket enklare problem.

(1), då $x \leq -\frac{2}{3}$. I detta intervall är

≤ 0 då $x \leq -\frac{2}{3}$

$$|\underbrace{3x+2}| = -(3x+2) \quad \text{och}$$

$$|\underbrace{2-x}| = 2-x$$

≥ 0 då $x \leq -\frac{2}{3}$

och därmed kan vår ursprungliga ekvation,

$$|3x+2| - 4\cdot|2-x| = 3-x$$

skrivas utan belopp, som

$$-(3x+2) - 4\cdot(2-x) = 3-x$$

i detta intervall

Löser vi denna ekvation, får vi $x - 10 = 3 - x \iff$
$\iff 2x = 13 \iff x = \frac{13}{2}$. Sedan måste vi kontrollera om detta x ligger i intervallet!

Vi ser att $\frac{13}{2}$ inte tillhör intervallet $x \leq -\frac{2}{3}$,

och detta betyder att det inte finns några $x \leq -\frac{2}{3}$ som uppfyller ekvationen!

Sedan får vi undersöka de båda andra intervallen på motsvarande sätt.

(2), då $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. I detta intervall är $|3x+2| = 3x+2$, och $|2-x| = 2-x$,

så på motsvarande sätt som i fall (1) kommer vi att få att $7x-6 = 3-x \iff x = \frac{9}{8}$

Vi konstaterar att $\frac{9}{8}$ ligger i intervallet $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

Så $x = \frac{9}{8}$ är en lösning.

(3), då $x \geq 2$ får på motsvarande sätt ekvationen $10-x = 3-x \iff 10 = 3$. Det finns inga x som uppfyller den ekvationen, så det finns inga $x \geq 2$ som löser ekvationen

Därefter sammanfattar vi vad vi fått fram, genom att räkna upp alla lösningar från de olika intervallen, och vi ser att ekvationen endast har en lösning, nämligen $x = \frac{9}{8}$

(*) OBS Observera att du måste ha med $a=0$ i uppdelningen, $|a| = \begin{cases} a, & \text{om } a \geq 0 \\ -a, & \text{om } a \leq 0. \end{cases}$

Det räcker att likhet finns med på en rad, t.ex. $|a| = \begin{cases} a, & \text{om } a \geq 0 \\ -a, & \text{om } a < 0 \end{cases}$, men den måste vara med på minst en rad