

Lös olikheten $\frac{5}{x-3} \leq x+1$.

Lösning

WARNING! Vi ska INTE multiplicera båda led med $x-3$! Det kan vi göra om vi har likhet, men inte när vi har olikhet. *Varför då?*

- * Om vi multiplicerar med något positivt tal, så går olikheten åt samma håll
- * Om vi multiplicerar med något negativt tal, så vänds olikheten åt andra hållet
- * Vi vet inte vilket tecken $x-3$ har, det beror på vad x är

GÖR SÅ HÄR ISTÄLLET

Ska vi undersöka en olikhet, så vill vi helst skriva om den så att vi har talet 0 på ena sidan. Då behöver vi bara reda ut vad den andra sidan har för tecken.

$$\frac{5}{x-3} \leq x+1 \iff \frac{5}{x-3} - (x+1) \leq 0 \iff$$

flytta allt till vänsterledet (eller allt till högerledet)

glöm inte parentesen kring $x+1$, vi ska ju dra bort hela uttrycket $x+1$ från vänsterledet

$$\Leftrightarrow \frac{5 - (x-3)(x+1)}{x-3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \text{glöm inte parenteserna}$$

\swarrow sätt allt på
 minsta gemensamma

nämnare

$$\Leftrightarrow \frac{5 - (x^2 + x - 3x - 3)}{x-3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 8}{x-3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x-3} \geq 0 \quad \bullet$$

\swarrow Vi vill ha 1 framför x^2 -termen,
 dividera därför med -1 .
 Olikheten byter därmed riktning

Sedan faktorerar vi täljaren (nämnaren är redan klar).

Faktorisering av $x^2 - 2x - 8$ kan göras på två sätt

Alt 1: Kvadratkomplettering.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x - 8 &= (x-1)^2 - 1 - 8 = (x-1)^2 - 9 = \\
 &= (x-1)^2 - 3^2 \stackrel{\uparrow}{=} ((x-1)-3)((x-1)+3) = \\
 & \quad \text{konjugatregeln} \\
 &= (x-4)(x+2)
 \end{aligned}$$

Alt 2: Lös $x^2 - 2x - 8 = 0$, använd samband mellan nollställen och faktorer.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x - 8 = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \\
 \Leftrightarrow x = 4 \text{ eller } x = -2, \text{ så} \\
 x^2 - 2x - 8 &= (x-4)(x+2)
 \end{aligned}$$

Därmed har vi fått fram att vi ska undersöka
olikheten $\frac{(x-4)(x+2)}{x-3} \geq 0$.

En teckentabell, som innehåller alla faktorer
och deras nollställen, hjälper

x	-2	3	4	
$x-4$	-	-	-	0
$x+2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$\frac{(x-4)(x+2)}{x-3}$	-	0	+	-
	+	0	+	0

alla faktorer
 alla faktorens nollställen,
 skrivna i storleks-
 ordning
 Här står
 utskrivet
 * var varje faktor
 blir 0
 * Vad varje faktor
 har för tecken,
 då ingen faktor är 0
 (i varje sådant
 intervall)
 Här är
 nämnaren 0,
 så uttrycket
 existerar ej
 Här är täljaren
 0, så uttrycket
 blir 0
 Det uttryck
 som studeras

Vi behöver bara räkna antalet
negativa tecken. Udda antal minus-
tecken gör att uttrycket blir negativt,
annars blir det positivt

Slutligen, vi vill veta för vilka x som $\frac{(x-4)(x+2)}{x-3} \geq 0$.

Det ser vi i tabellen, det är där det på sista raden
står + eller 0, dvs då $-2 \leq x < 3$ eller $x \geq 4$