Beräkna

a) $\sum_{k=3}^{67} (5-3k)$ b) $\sum_{k=1}^{104} \frac{1}{3^{2k}}$ c) $\sum_{n=2}^{5} n^2$

Lösning

Vi har formler för aritmetisk och geometrisk summa.

* En aritmetisk summa har konstant skillnad mellan två på varandra följande termer.

En sådan summa har formen

$$\sum_{k=m}^{n} (a+d\cdot k) = (a+dm)+(a+d(m+1))+\dots$$

$$\dots+(a+dn)$$

1:a termen är $(a+dm)$, sista termen är $(a+dn)$

och antalet termer är $n-m+1$

← OBS

Aritmetiska summan är

$$\underbrace{\sum_{k=m}^{n} (a+dk) = (\text{antal termer})\cdot\frac{(\text{första term})+(\text{sista term})}{2}}$$

KOM IHÅG SUMMA PÅ DEN FORMEN, I ORD!

* En geometrisk summa har konstant kvot mellan två på varandra följande termer.

En sådan summa har formen

$$\sum_{k=m}^{n} \left(a \cdot q^k \right) = a \cdot q^m + a \cdot q^{m+1} + \ldots + a \cdot q^n$$

1:a termen är $a \cdot q^m$, kvoten är q

och antalet termer är $n - m + 1$.

OBS

Geometriska summan är

$$\sum_{k=m}^{n} (a \cdot q^k) = (\text{första term}) \cdot \frac{1 - \text{kvot}^{(\text{antal termer})}}{1 - \text{kvot}}$$

om kvoten $q \neq 1$

KOM IHÅG SUMMAN PÅ DEN FORMEN, I ORD!

Om kvoten $q = 1$ så blir det enklare.

Då fås $\sum_{k=m}^{n} a \cdot q^k = \sum_{k=m}^{n} a = a + a + \ldots + a =$

$= (\text{första term}) \cdot (\text{antalet termer})$

* Har du summan skriven med Σ-symbolen så är det alltid bra att börja med att skriva ut termerna i början och slutet. Då kan det vara enklare att se vad du har!

* Ska du använda aritmetiska summaformeln så måste du veta att summan är aritmetisk!

Låter självklart

Ska du använda geometriska summaformeln så måste du veta att summan är geometrisk!

* Summor behöver varken vara aritmetiska eller geometriska!!

a) $\sum_{k=3}^{67}(5-3k)$ är en aritmetisk summa

(termerna har formen $(a+d\cdot k)$ där $a=5$ och $d=-3$)

men det kanske är lättare att se om vi skriver ut termerna i början och slutet:

$$\sum_{k=3}^{67}(5-3k) = (5-3\cdot3)+(5-3\cdot4)+(5-3\cdot5)+\ldots+(5-3\cdot67) =$$

$$= -4-7-10-\ldots-196$$

Vi ser att vi drar bort 3 från en term till nästa, dvs differensen är konstant $= -3$, så vi har en aritmetisk summa.

Första termen $= 5 - 3 \cdot 3 = -4$

Sista termen $= 5 - 3 \cdot 67 = -196$

Antalet termer $= 67 - 3 + 1 = 65$

Alltså är $\sum_{k=3}^{67} (5 - 3k) = (\text{antal termer}) \cdot \dfrac{(\text{första term}) + (\text{sista term})}{2}$

$$= 65 \cdot \frac{-4 + (-196)}{2} = 65 \cdot (-100) = -6500.$$

Är svaret rimligt? Alla termer är negativa så svaret måste bli negativt. Det är den allra grövsta rimlighetskontrollen

b) $\sum_{k=-1}^{104} \frac{1}{3^{2k}}$. Denna har inte riktigt den form vi vill ha för att identifiera aritmetisk eller geometrisk summa.

Skriv ut termer!

$$\sum_{k=-1}^{104} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{3^{(-2)}} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{208}} =$$

$$= 9 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{9^{104}}$$

och här kanske det är lättare att se att det är en geometrisk summa med kvot $= \frac{1}{9}$ och första term $= 9$.

Vi kan dessutom skriva om den som

$$\sum_{k=-1}^{104} \left(\frac{1}{9}\right)^k \quad , \text{ så antal termer } = 104-(-1)+1 = 106$$

ett annat sätt att komma fram till summa så?

Alltså är

$$\sum_{k=-1}^{104} \frac{1}{3^{2k}} = \underbrace{\sum_{k=-1}^{104} \frac{1}{9^k} = \sum_{k=-1}^{104} \left(\frac{1}{9}\right)^k}_{} =$$

$$= (\text{första term}) \cdot \frac{1-\text{kvoten}^{(\text{antal termer})}}{1-\text{kvoten}} =$$

$$= 9 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{106}}{1-\frac{1}{9}} = 9 \cdot \frac{1-\frac{1}{9^{106}}}{\frac{8}{9}} = \frac{81}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{9^{106}}\right)$$

Är svaret rimligt? Det verkar vara lite större än 10 ($\frac{1}{9^{106}}$ är ytterst litet), vilket inte är orimligt.

c) $\sum_{n=2}^{5} n^2$ har inte en form som stämmer med aritmetisk eller geometrisk summa.

Skriv ut termerna (de är ju inte så många)

$$\sum_{n=2}^{5} n^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54.$$

ingen idé att krångla till det, det är ju bara fyra termer.

OBS

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \overbrace{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}^{\text{innehåller inga } k\text{!}}$$

k = summationsindex

När summan räknas ut så sätter man i tur och ordning in $k=m$, $k=m+1$, ..., $k=n$.

Den uträknade summan kommer inte att innehålla några k (om k = summationsindex)