LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

7 september 2017
TATA68

Några saker att tänka på

- Belopp
  - Definitionen, den ser olika ut för reella och komplexa tal
    * Om x är reellt så är $|x| = \begin{cases} x & , \text{ då } x \geq 0 \\ -x & , \text{ om } x \leq 0. \end{cases}$
      Observera att du måste ha med likhet i minst en av olikheterna. Om du bara studerar fallen $x > 0$ och $x < 0$ så har du inte tagit med fallet $x = 0$!
    * Om $z = x + yi$ där x och y är reella så är $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
      (om $z = x = x + 0i$ så fås $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, dvs samma som i det reella fallet).
    * $|z - a|$ avståndet mellan z och a (både för reella och komplexa z).
  - Vid räkning med belopp av reella tal
    * Oftast så fungerar falluppdelningen. Ska man t ex lösa ekvationen

      $$|3x + 2| - 4\,|2 - x| = 3 - x$$

      så är det lämpligt att dela upp i ett antal (tre) olika fall, beroende på vad $(3x + 2)$ och $(2 - x)$ har för tecken.
    * Ibland är det lämpligare att göra avståndstolkning. Ska man t ex finna alla reella x som uppfyller $|x + 3| > 7$ så är det mycket enklare att tänka på att $|x + 3| = |x - (-3)|$ betyder avståndet från x till (-3). Detta avstånd ska vara större än 7, således ska $x > 4$ eller $x < -10$. Rita på tallinjen så blir det lättare.

- Olikheter
  - Det är oftast bra om man kan ha 0 på ena sidan. Ska man undersöka olikheten

    $$\frac{5}{x-3} \leq x + 1$$

    så är det bättre att skriva om den som

    $$\frac{5}{x-3} - (x + 1) \leq 0 \qquad \text{eller} \qquad x + 1 - \frac{5}{x-3} \geq 0$$

  - Sätt allt på gemensam nämnare (minsta gemensamma nämnaren).
  - Faktorisera täljaren och nämnare.
  - Gör en teckentabell.
  - OBS, OBS!! Multiplicera inte med saker som du inte vet tecknet på. I exemplet ovan ska du INTE multiplicera med $(x - 3)$:
    * Om $x - 3 > 0$ så kommer olikheten att gå åt samma håll som innan
    * Om $x - 3 < 0$ så kommer olikheten att vändas åt andra hållet!
    * Vi vet inte vilket tecken $x - 3$ har, det beror på vad x är.

- Rotuttryck

- Definitionen
  - $\sqrt{x}$ är bara definierad då $x \geq 0$.
  - $y = \sqrt{x}$ betyder att $y^2 = x$ och att $y \geq 0$
  - $\sqrt{x} \geq 0$ då $x \geq 0$, så $\sqrt{x}$ kan inte bli negativ. Exempelvis är $\sqrt{9} = 3$ och ingenting annat.
- Rotuttryck i ekvationer. Om du kvadrerar, för att bli av med rotuttrycket, måste du tänka på att
  - Du kan INTE kvadrera termvis, exempelvis är $1 + 1 = 2$ men $1^2 + 1^2 \neq 2^2$.
  - Ska du kvadrera, så måste du kvadrera hela vänsterledet och hela högerledet. Det innebär att du antagligen vill ha rotuttrycket för sig själv på ena sidan. Ska du t ex lösa ekvationen

    $$3 + \sqrt{2 - x} = 4x$$

    så är det bäst att skriva om den som $\sqrt{2 - x} = 4x - 3$ först.
  - När du kvadrerar så har du vanligtvis INTE ekvivalens utan bara implikation. I exemplet ovan fås

    $$\sqrt{2 - x} = 4x - 3 \implies 2 - x = (4x - 3)^2$$

    och det betyder att du MÅSTE kontrollera lösningarna efteråt. Du kan ha fått med lösningar till den andra ekvationen som inte är lösningar till den ursprungliga.

- Polynom
  - Tänk på att ekvationslösning och faktorisering är två olika saker
  - För att lösa ekvationen $P(x) = 0$
    - Vi vill helst ha konstanten 1 framför högstagradstermen. Står där något annat så delar vi bort det.
    - 2:a-gradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ löser vi med kvadratkomplettering eller pq-formeln, när den fungerar. Observera att det inte får dyka upp roten ur negativa tal eller roten ur komplexa tal, då fungerar inte pq-formeln.
    - Polynomekvationer av högre grad löser vi genom att först gissa något nollställe till P.
      - Om $P(a) = 0$ så delar vi därefter $P(x)$ med $x - a$.
      - Då SKA resten bli 0, annars har man räknat fel!
      - Man får fram en kvot, $Q(x)$, därefter löser man $Q(x) = 0$.
      - Sedan samlar man ihop alla nollställen som dykt upp i räkningarna.
    - Vad ska man gissa på, när man löser polynomekvationer?
      - Om $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ har **heltalskoefficienter**, så prövar man med rationella tal på formen p/q, där p är en faktor i a_0 och q en faktor i a_n
      - Om $P(x)$ har **reella** koefficienter, och om $x = a + bi$ är ett nollställe, så är $\bar{x} = a - bi$ det.

- Ska vi faktorisera $P(x)$ så kan vi inte dividera bort konstanten framför högstagradstermen, då ändrar vi polynomet! Vi får istället bryta ut konstanten.

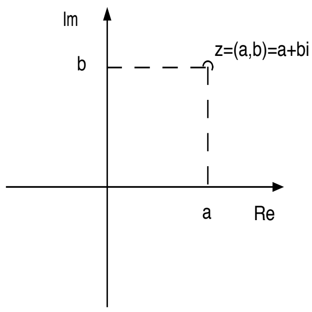
- Summor
  - Definitionen: $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$, summan har $(n-m+1)$ antal termer.
  - Skriv ut några termer i början och slutet, så får du en bättre uppfattning om vad det står.
  - Aritmetisk summa $\sum_{k=0}^{n}(a + k \cdot d)$ dvs summa med konstant skillnad, d, är lika med

$$\text{antal termer} \cdot \frac{\text{första termen} + \text{sista termen}}{2}.$$

  - Geometrisk summa $\sum_{k=0}^{n}(a \cdot q^k)$ dvs summa med konstant kvot, q är lika med

$$\text{första term} \cdot \frac{1 - \text{kvot}^{\text{antal termer}}}{1 - \text{kvot}} \quad , \quad \text{om kvoten } q \neq 1$$

- Komplexa tal
  - Ett komplext tal har formen $z = a + bi$, där a och b är reella tal. De kan illustreras i det komplexa talplanet



  - Realdelen av z: $Re(z) = a$, Imaginärdelen av z: $Im(z) = b$
  - Imaginära enheten, i är definierad så att $i^2 = -1$ (punkten $(0, 1)$ i figuren)
  - $\bar{z} = a - bi$ (byt tecken på imaginärdelen)
  - Absolutbeloppet av z, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (avståndet till origo)
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
  - Observera triangelolikheten: $|z + w| \leq |z| + |w|$

- Kommer man inte på några andra idéer så kan man alltid ansätta $z = a + bi$. Observera att $z = w \iff \begin{cases} Re(z) & = Re(w) \\ Im(z) & = Im(w) \end{cases}$ så om $a + bi = c + di$ (där $a,\ b,\ c$ och d är reella) så är $a = c$ och $b = d$
- För att lösa komplexa andragradsekvationen $z^2 + Az + B = 0$ där a och b är komplexa tal:
  * Kvadratkomplettera, så att du har $\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 - B$
  * Sätt $z + \frac{A}{2} = w$ och därefter $w = a + bi$ (kan förstås göras i ett steg), så du har $(a + bi)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 - B$
  * Jämför sedan realdel, imaginärdel och belopp av båda led, för att bestämma a och b
  * Slutligen måste du gå tillbaka till vad z är

• Binomialkoefficienter och fakultet

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ då $n = 1, 2, \dots$
- $0! = 1$
- Om $n \geq 0$ är heltal och $0 \leq k \leq n$ är heltal så är
  * $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
  * $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  * Pascals triangel

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & \mathbf{10} & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}
$$

    där rad n innehåller $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ och där varje tal inuti triangeln är summa av de båda talen snett ovanför.

- Binomialutvecklingen $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, exempelvis är

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = \Big/ \text{ur Pascals triangel} \Big/ =$$
$$= 1 \cdot a^4 \cdot b^0 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot a^0 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$