Lösningsförslag TATA68 2019-01-09

1. (a) Vi sorterar termerna och faktoriserar:

$$x^3 + x^2 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 + x - 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+2)\,(x-1) > 0$$

En teckentabell:

		-2		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x(x+2)(x-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser i tabellen att uttrycket är positivt precis då $-2 < x < 0$ eller $x > 1$.

(b) Genom att skriva om nämnare och täljare i bråket på lämplig polär form så ser vi att

$$\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2i - 2}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{4}e^{-i\pi/3}}{\sqrt{8}e^{i3\pi/4}}\right)^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\pi/3+3\pi/4)}\right)^{12}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\pi/3+3\pi/4)}\right)^{12} = \frac{1}{64}\,e^{-i13\pi} = -\frac{1}{64}.$$

(c) Enligt binomialsatsen så gäller att

$$(1+x)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}1^{5-k}x^k = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^k,$$

så med $x = 1$ erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} = 2^5 = 32.$$

Man kan givetvis direkt räkna ut de 6 termerna i summan också (Pascals triangel).

Svar: (a) $-2 < x < 0$ eller $x > 1$ (b) $-\dfrac{1}{64}$ (b) 32.

2. Låt $t = e^x > 0$. För $t > 0$ så är

$$e^x + e^{2x} = e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + t = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Alltså ges den enda lösningen av $x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ eftersom $t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

Vidare gäller att

$$\ln(e + e^x) = 1 + x \quad \Leftrightarrow \quad e + e^x = e \cdot e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x(e-1) = e$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) = 1 - \ln(e-1).$$

Svar: $x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ respektive $x = 1 - \ln(e-1)$.

3. (a)

$$\sin(2x) = \sin(4-4x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 4 - 4x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ 2x = \pi - (4-4x) + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x = 4 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ -2x = \pi - 4 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{2+\pi n}{3}, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ x = 2 - \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

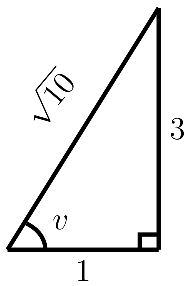
(b)

$$D_{\sin} = \mathbf{R} \text{ och } V_{\sin} = [-1,1] \text{ samt } D_{\arcsin} = [-1,1] \text{ och } V_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c)

Låt $v = \arctan 3$. Då gäller att $0 < v < \pi/2$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



Svar: (a) $x = \dfrac{2+\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ eller $x = 2 - \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) se ovan (c) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Vi ser att

$$\sin^2 3x \, \cos 2x = \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 6x \cdot \cos 2x.$$

En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \cos 6x \cdot \cos 2x &= \left(\frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i8x}+e^{i4x}+e^{-i4x}+e^{-i8x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 8x + \cos 4x\right), \end{aligned}$$

så

$$\sin^2 3x \, \cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\left(\cos 8x + \cos 4x\right).$$

Man kan förstås använda Eulers formler direkt på ursprungsuttrycket också. Ekvationen i fråga kan nu skrivas som

$$\begin{aligned} &4\sin^2 3x \, \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \pi n, \quad \text{där } n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

5. (a) Enligt regler för exponentialfunktionen så gäller att

$$e^{i\pi/5+\pi/7}=e^{i\pi/5}e^{\pi/7}.$$

Då e^{ix} är ett tal på enhetscirkeln för alla $x\in\mathbf{R}$ så blir då

$$|e^{i\pi/5+\pi/7}|=|e^{i\pi/5}||e^{\pi/7}|=e^{\pi/7}>1,$$

då exp är strängt växande, $\pi/7>0$ och $e^0=1$.

(b) Vi söker de $z\in\mathbf{C}$ så att

$$z^5=-32.$$

Det komplexa talet -32 kan till exempel skrivas

$$-32=2^5e^{i\pi}.$$

Låt nu $z=re^{i\varphi}$, där $r\geq 0$ och $\varphi\in\mathbf{R}$. Då måste

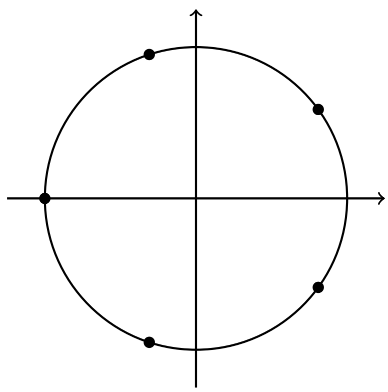
$$z^5=r^5e^{i5\varphi}=2^5\,e^{i\pi}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}r^5=2^5,\ r\geq 0,\\5\varphi=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}\tag{1}$$

Detta visar att $r=2$ och $\varphi=\frac{\pi}{5}+\frac{2n\pi}{5}=\frac{(2n+1)\pi}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z=2\,e^{i\frac{(2n+1)\pi}{5}},\quad n=0,1,2,3,4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n=5$ får vi samma lösning som när $n=0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n\in\mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: (a) se ovan. (b) $z=2\,e^{i\frac{(2n+1)\pi}{5}}$, $n=0,1,2,3,4$.

6. Eftersom vi har en geometrisk summa så kommer summan att ha utseendet

$$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^n,$$

där a och q är reella tal. I uppgiften är givet att

$$a+aq^3=14\quad\text{och}\quad a+aq+aq^2+aq^3=10.$$

Alltså måste $a(1+q^3)=14$ och, om $q\neq 1$,

$$10=a(1+q+q^2+q^3)=a\frac{q^4-1}{q-1}=a\frac{(q^2-1)(q^2+1)}{q-1}=a(q+1)(q^2+1),$$

där vi utnyttjade formeln för en geometrisk summa samt faktoriserade

$$q^4 - 1 = (q^2 - 1)(q^2 + 1).$$

Vidare gäller att, såvida $q \neq -1$,

$$a(1 + q^3) = 14 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{14}{1 + q^3},$$

så

$$10 = \frac{14}{1+q^3}(q+1)(q^2+1) = \frac{14(q^2+1)(q+1)}{(1+q)(q^2-q+1)} = 14\,\frac{q^2+1}{q^2-q+1},$$

vilket ger att

$$10(q^2 - q + 1) = 14(q^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad q = -2 \text{ eller } q = -\frac{1}{2}.$$

Om $q = -2$ blir $a = 14/(1 + q^3) = -2$ och om $q = -1/2$ så blir

$$a = \frac{14}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$$

Fallet $q = -1$ skulle ge $a - a + a - a = 0 \neq 10$ och fallet $q = 1$ ger att $2a = 14$ samt $4a = 10$, så dessa värden på q kan ej ge en lösning. Den femte termen kan således anta värdena

$$aq^4 = -2 \cdot (-2)^4 = -32$$

eller

$$aq^4 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1.$$

Svar: (a) -32 eller 1.

7. Vi börjar med att reda ut en definitionsmängd D_f där $-2 \in D_f$, $D_f = I$ är ett intervall och $V_f = [0, 1]$. Polynomet kan kvadratkompletteras enligt

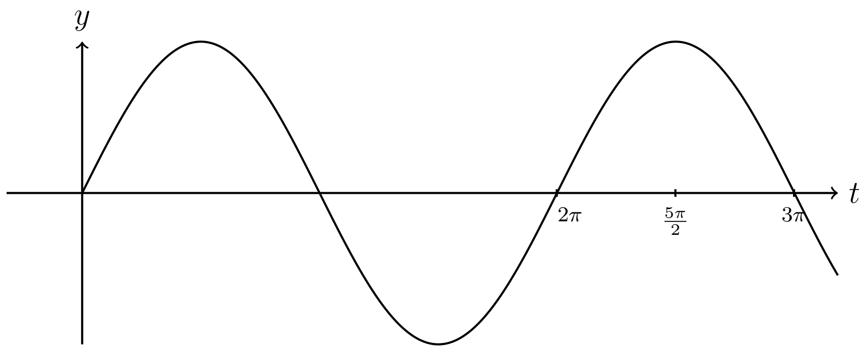
$$x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7.$$

Vi ser att

$$(-2 - 2)^2 - 7 = 9 < 3\pi.$$

Alltså är det nödvändigt att $2\pi \leq x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi$ för att kvadratroten skall vara definierad (annars får vi med värden på x som gör att sin blir negativ). Men detta krav är inte tillräckligt för att funktionen ska vara inverterbar. Genom kvadratkompletteringen ovan ser vi att vi har en minpunkt då $x = 2$, så polynomet $x^2 - 4x - 3$ är strängt avtagande för $x \leq 2$ och strängt växande för $x \geq 2$.

Om vi betraktar $y = \sin t$ så ser vi följande.



Då $\frac{5\pi}{2} < \frac{5 \cdot 3.2}{2} < 8 < 9$ så är det tydligt att $\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3$ är nödvändigt för att kunna invertera $y = f(x)$ (med kravet att $-2 \in D_f$). Vi löser de olikheter vi fått fram:

$$\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (x-2)^2 - 7 - \frac{5\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad |x-2| \geq \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}$$

samt

$$x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 7 - 3\pi \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad |x-2| \leq \sqrt{7 + 3\pi}.$$

Med kravet att intervallet ska innehålla -2 så gäller dessa två olikheter precis då

$$2 - \sqrt{7 + 3\pi} \leq x \leq 2 - \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}, \tag{2}$$

Beteckna detta intervall som I. I detta intervall är även $x^2 - 4x - 3$ strängt avtagande, så funktionen kommer att gå att invertera (eftersom det är en sammansättning av två injektiva funktioner på I). Vidare är det tydligt att $V_f = [0, 1]$ om $D_f = I$.

Så hur ser då inversen ut? För $x \in D_f = I$ gäller att

$$\begin{aligned}
y = \sqrt{\sin\left(x^2 - 4x - 3\right)} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = \sin\left(x^2 - 4x - 3\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ \pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-2)^2 = \arcsin(y^2) + 2n\pi + 7, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ (x-2)^2 = \pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi + 7, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Genom att titta på mellanledet i ekvivalenskedjan så ser vi att endast fallet

$$\pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3$$

är möjligt med $n = 1$. Detta eftersom $0 \leq \arcsin(y^2) \leq \frac{\pi}{2}$ och $\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi$. Om vi löser ut x ser vi att

$$x = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7},$$

där vi valde den lösningen eftersom vi vet att (2) måste gälla. Vi finner således högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7}$.

Svar: $D_f = \left[2 - \sqrt{7 + 3\pi},\, 2 - \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}\right]$ samt $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7}$.