# Lösningsskiss till övningsdugga 1, nummer 1, i Matematisk grundkurs

(Observera att detta är förslag på lösningar, det kan finnas andra vägar också)

1. (a) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x-y}{xy}} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y.$ (för $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$)

(kontrollera genom att sätta in t.ex. $x = 1$ och $y = 2$ före och efter)

Svar: $x + y$.

(b) $x^2 + 4x + y^2 - y + 2 = 0 \iff (x+2)^2 - 4 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = 0 \iff$

$\iff (x+2)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \iff (x+2)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ vilket är ekvationen för en cirkel med radie $r = \frac{3}{2}$ och medelpunkt $(x,y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

(kontrollera de punkter där en av parenteserna blir 0)

Svar: radien $r = \frac{3}{2}$ och medelpunkten $(x,y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

(c) $\sum_{k=4}^{25} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \cdots + \frac{3}{2^{25}}$ är en geometrisk summa med första term$= \frac{3}{2^4}$, kvot$= \frac{1}{2}$ och med antal termer$= 25 - 4 + 1 = 22$.

Således är $\sum_{k=4}^{25} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{22}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{22}}\right)$.

Svar: $\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{2^{22}}\right)$.

(d) $(2-x)^5 = \Big/\text{binomialutveckling}\Big/ = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^k (-x)^{5-k} = \Big/\text{Pascals triangel mm}\Big/ =$

$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$. (kontrollera med några enkla $x$-värden)

Svar: $32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$.

2. $\frac{x}{2} + \sqrt{7-x} = 2 \iff \sqrt{7-x} = 2 - \frac{x}{2} \implies$ /kvadrera båda led, ej ekvivalens/ $\implies$

$\implies 7 - x = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 \iff$ /lös ekvationen/ $\iff x = -2$ eller $x = 6$.

Vi har ej ekvivalens hela vägen, så vi MÅSTE kontrollera (i ursprungliga ekvationen):

- $x = -2$ ger $V.L. = \frac{-2}{2} + \sqrt{7+2} = -1 + \sqrt{9} = -1 + 3 = 2 = H.L.$ så $x = -2$ är en lösning.
- $x = 6$ ger $V.L. = \frac{6}{2} + \sqrt{7-6} = 3 + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4 \neq H.L$ så $x = 6$ är **inte** en lösning.

Svar: $x = -2$.

3. $x < \frac{x^2+5}{x+3} \iff x - \frac{x^2+5}{x+3} < 0 \iff \frac{x(x+3)-(x^2+5)}{x+3} < 0 \iff$

$\iff \frac{3x-5}{x+3} < 0$. Teckentabellen

| $x$ | | $-3$ | | $5/3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-5$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\dfrac{3x+5}{x+3}$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ |

visar att olikheten gäller då $-3 < x < \dfrac{5}{3}$ .

(kontrollera rimligheten genom att t ex sätta in $x = -4,\ x = 0$ och $x = 2$)

Svar: $-3 < x < \dfrac{5}{3}$ .

4. Vi gör falluppdelning:
$|x| = \begin{cases} x & , \text{ då } x \geq 0 \\ -x & , \text{ då } x \leq 0 \end{cases}$ och $|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \text{ då } x \geq -2 \\ -(x+2) & , \text{ då } x \leq -2. \end{cases}$ Vi får alltså tre fall

- Om $x \leq -2$ så fås
$|x| + 5 = 2|x+2| \iff -x+5 = -2(x+2) \iff x = -9$, som ligger i intervallet.
- Om $-2 \leq x \leq 0$ så fås
$|x|+5 = 2|x+2| \iff -x+5 = 2(x+2) \iff x = 1/3$ som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.
- Om $x \geq 0$ så fås
$|x| + 5 = 2|x+2| \iff x+5 = 2(x+2) \iff x = 1$ som ligger i intervallet.

(kontrollera genom direkt insättning i ursprungliga ekvationen)

Svar: $x = -9$ eller $x = 1$.

5. Det saknas $z$-term, så vi behöver inte kvadratkomplettera. Ansätt $z = a + bi$, där $a$ och $b$ är reella, så fås $(a+bi)^2 = 3-4i \iff a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$. Identifiering av realdel, imaginärdel och belopp ger ekvationerna

$$\begin{cases} Re: & a^2 - b^2 = 3 \\ Im: & 2ab = -4 \\ Abs: & a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5. \end{cases}$$

$Re + Abs$ ger därefter att $2a^2 = 8 \iff a = \pm 2$, och ur $Im$ fås att om $a = 2$ så är $b = -1$, om $a = -2$ så är $b = 1$. Således är $z = 2 - i$, eller $z = -2 + i$.
(kontroll görs genom direkt insättning, eller via sambandet mellan rötter och koefficienter)

Svar: $z = 2 - i$ eller $z = -2 + i$.

6. $1 - \sqrt{4x^3 - 5x + 2} = 2x \iff 1 - 2x = \sqrt{4x^3 - 5x + 2} \implies$ /kvadrera båda led, ej ekvivalens/ $\implies (1-2x)^2 = 4x^3 - 5x + 2 \iff 4x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0$. Prövning visar att $x = 1$ är en lösning till denna ekvation, och polynomdivision ger därefter att $4x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0 \iff (x-1)(4x^2 - 1) = 0 \iff (x-1)(x-1/2)(x+1/2) = 0$ dvs $x = 1$, $x = 1/2$ eller $x = -1/2$. eftersom vi inte har ekvivalens hela vägen så MÅSTE kontrollera (i ursprungliga ekvationen):

- $x = 1$ ger $V.L. = 1 - \sqrt{4 - 5 + 2} = 1 - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$ och $H.L. = 2 \cdot 1 = 2$, dvs $V.L. \neq H.L.$ så $x = 1$ är **inte** en lösning.
- $x = 1/2$ ger $V.L. = 1 - \sqrt{1/2 - 5/2 + 2} = 1 - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1$ och $H.L = 2 \cdot 1/2 = 1$, dvs $V.L. = H.L.$ så $x = 1/2$ är en lösning.
- $x = -1/2$ ger $V.L. = 1 - \sqrt{-1/2 + 5/2 + 2} = 1 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$ och $H.L = 2 \cdot (-1/2) = -1$, dvs $V.L. = H.L.$ så $x = -1/2$ är en lösning.

Svar: $x = 1/2$ eller $x = -1/2$.

7. OBS: RITA FIGUR (se nästa sida)

Låt $(a, b)$ vara en punkt på cirkeln, dvs $a^2 + b^2 = 1$. Linjen genom $(a, b)$ och $(0, 0)$ är normal till cirkeln och har lutningen $k_1 = \dfrac{b}{a}$. Linjen genom $(a, b)$ och $(7, -4)$ har lutningen $k_2 = \dfrac{b+4}{a-7}$. Denna linje ska vara tangera cirkeln, så $k_1 \cdot k_2 = -1$. Således ska $\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{b+4}{a-7} = -1 \iff b(b+4) = -a(a-7) \iff a^2 + b^2 = 7a - 4b$. Dessutom ligger $(a, b)$ på cirkeln, dvs $a^2 + b^2 = 1$, så vi har ekvationssystemet $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 7a - 4b \end{cases}$

Således är $7a - 4b = 1 \iff b = \dfrac{7a - 1}{4}$, vilket insatt i den första ekvationen ger $a^2 + \left(\dfrac{7a-1}{4}\right)^2 = 1 \iff 16a^2 + 1 - 14a + 49a^2 = 16 \iff 65a^2 - 14a - 15 = 0 \iff$

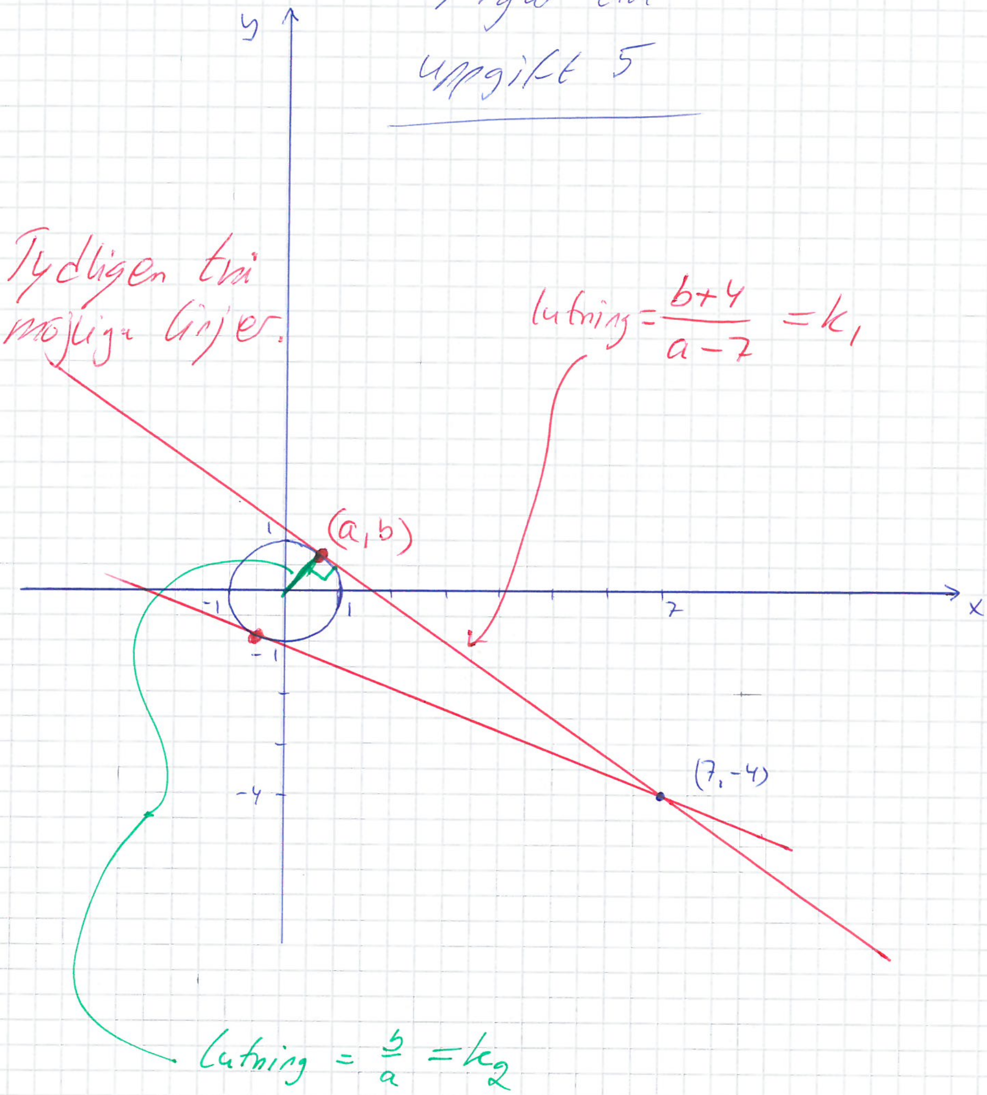
$$\iff a^2 - \frac{14}{65}a - \frac{15}{65} = 0 \iff a = \frac{7}{65} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{65}\right)^2 + \frac{15}{65}} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 15 \cdot 65}}{65} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{1024}}{65} = \frac{7 \pm \sqrt{2^{10}}}{65} = \frac{7 + 2^5}{65} = \frac{7 \pm 32}{65},$$ dvs $a = \dfrac{39}{65} = \dfrac{3 \cdot 13}{5 \cdot 13} = \dfrac{3}{5}$ eller

$a = -\dfrac{25}{65} = -\dfrac{5 \cdot 5}{5 \cdot 13} = -\dfrac{5}{13}$. Ur sambandet $b = \dfrac{7a-1}{4}$ fås slutligen att
om $a = \dfrac{3}{5}$ så blir $b = \dfrac{4}{5}$ och om $a = -\dfrac{5}{13}$ så blir $b = -\dfrac{12}{13}$.
(rita en figur för att kolla rimligheten, kontrollera att tangeringspunkterna ligger på cirkeln samt att tangeringslinjerna och linjerna genom cirkelns medelpunkt blir vinkelräta)

Svar: $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ och $\left(-\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$.

Figur till uppgift 5




Villkor: $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$