# Lösningsskiss till övningsdugga 1, nummer 2, i Matematisk grundkurs

(Observera att detta är förslag på lösningar, det kan finnas andra vägar också)

1. (a) $\dfrac{7-3i}{2+i} = \dfrac{(7-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{11-13i}{5} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{13}{5}i$

   (kontrollera genom att multiplicera svaret med ursprungliga nämnaren, vad ska det bli?)

   Svar: $\dfrac{11}{5} - \dfrac{13}{5}i$.

   (b) $\sum_{k=7}^{206}(4-3k) = (4-3\cdot 7)+(4-3\cdot 8)+\cdots+(4-3\cdot 206)$ är en aritmetisk summa med första term$=(4-3\cdot 7)$, sista term$=(4-3\cdot 206)$ och med antal termer$=206-7+1=200$.

   Således är $\sum_{k=7}^{206}(4-3k) = \dfrac{(4-3\cdot 7)+(4-3\cdot 206)}{2}\cdot 200 = 100\cdot(8-3\cdot 213) = -63100$.

   Svar: $-63100$.

   (c) $2x^2-6x+7 = 2\left(x^2-3x+\dfrac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}\right) =$

   $2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2} \geq \dfrac{5}{2}$, med likhet då $x = \dfrac{3}{2}$ . Alltså är det minsta värdet $\dfrac{5}{2}$ .

   (kontrollera omskrivningen genom att sätta in några olika värden på $x$)

   Svar: Minsta värdet är $\dfrac{5}{2}$ .

   (d) $\binom{14}{12} - \binom{13}{11} = \binom{14}{14-12} - \binom{13}{13-11} = \binom{14}{2} - \binom{13}{2} = \dfrac{14\cdot 13}{1\cdot 2} - \dfrac{13\cdot 12}{1\cdot 2} = 13$

   Svar: 13.

2. $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+4} \iff \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x+4} \geq 0 \iff \dfrac{2(x+4)-(x+1)}{(x+1)(x+4)} \geq 0 \iff$

   $\dfrac{x+7}{(x+1)(x+4)} \geq 0$. Teckentabellen

| $x$ | | $-7$ | | $-4$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+7$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+4$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\dfrac{x+7}{(x+1)(x+4)}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |

   visar att olikheten gäller då $-7 \leq x < -4$ eller $x > -1$.

   (kontrollera rimligheten genom att t ex sätta in några olika $x$-värden)

   Svar: $-7 \leq x < -4$ eller $x > -1$.

3. Ansätt $z = a+bi$, där $a$ och $b$ är reella, så fås $(1+2i)(a+bi)-(3-i)(a-bi) = 1+3i \iff a+bi+2ai-2b-(3a-3bi-ai-b) = 1+3i \iff -2a-b+(3a+4b)i = 1+3i$.

   Identifiering av realdel och imaginärdel ger ekvationerna

   $$\begin{cases} (Re): & -2a-b = 1 \\ (Im): & 3a+4b = 3. \end{cases}$$

   $(Re)$ ger $b = -1-2a$ och ur $(Im)$ fås därefter att $3a+4(-1-2a) = 3 \iff a = -7/5$, vilket slutligen ger $b = -1-2a = 9/5$. Således är $z = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{9}{5}i$.

(kontroll görs genom direkt insättning)

Svar: $z = -\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i.$

4. Vi gör falluppdelning:
$|x| = \begin{cases} x & , \text{ då } x \geq 0 \\ -x & , \text{ då } x \leq 0 \end{cases}$ och $|2-x| = \begin{cases} 2-x & , \text{ då } x \leq 2 \\ x-2 & , \text{ då } x \geq 2. \end{cases}$
Vi får alltså tre fall

- Om $x \leq 0$ så fås
$|2-x| = 3-|x| \iff 2-x = 3+x \iff x = -1/2$, som ligger i intervallet.
- Om $0 \leq x \leq 2$ så fås
$|2-x| = 3-|x| \iff 2-x = 3-x \iff 2 = 3$, en ekvation som saknar lösningar, dvs i detta intervall finns inga lösningar.
- Om $x \geq 2$ så fås
$|2-x| = 3-|x| \iff x-2 = 3-x \iff x = 5/2$ som ligger i intervallet.

(kontrollera genom direkt insättning i ursprungliga ekvationen)

Svar: $x = -1/2$ eller $x = 5/2$.

5. $2-\sqrt{13-8x} = 2x \iff \sqrt{13-8x} = 2-2x \implies$ /kvadrera båda led, ej ekvivalens/ $\implies$

$\implies 13-8x = (2-2x)^2 \iff 4x^2 = 9 \iff x = 3/2$ eller $x = -3/2$.

Vi har ej ekvivalens hela vägen, så vi MÅSTE kontrollera (i ursprungliga ekvationen):

- $x = -3/2$ ger $V.L. = 2-\sqrt{13-8\cdot(-3/2)} = 2-\sqrt{13+12} = 2-\sqrt{25} = 2-5 = -3$ och $H.L. = 2\cdot(-3/2) = -3$, dvs $V.L. = H.L.$ så $x = -2$ är en lösning.
- $x = 3/2$ ger $V.L. = 2-\sqrt{13-8\cdot(3/2)} = 2-\sqrt{13-12} = 2-\sqrt{1} = 2-1 = 1$ och $H.L. = 2\cdot(3/2) = 3$, dvs $V.L. \neq H.L.$ så $x = 3/2$ är **inte** en lösning.

Svar: $x = -3/2$.

6. $x^5+x^3 < 4x^4-6x^2 \iff x^5-4x^4+x^3+6x^2 < 0 \iff x^2(x^3-4x^2+x+6) < 0$. Faktorisera $x^3-4x^2+x+6$. Prövning visar att $x = -1$ är ett nollställe, så polynomdivision och lösning av andragradsekvation visar att $x^3-4x^2+x+6 = (x+1)(x-2)(x-3)$. Således ska vi lösa olikheten $x^2(x+1)(x-2)(x-3) < 0$. Teckentabellen

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $x^2(x+1)(x-2)(x-3)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

visar att olikheten gäller då $x < -1$ eller $2 < x < 3$.

(kontrollera rimligheten genom att t ex sätta in några olika $x$-värden)

Svar: $x < -1$ eller $2 < x < 3$.

7. Polynomet har minst ett nollställe $z = ai$, där $a$ är reellt, dvs $p(ai) = 0$. Sätt in $z = ai$ så fås $4(ai)^4 + 4(ai)^3 + 14(ai)^2 + 16ai - 8 = 0 \iff 4a^4 - 14a^2 - 8 + (-4a^3 + 16a)i = 0$. Identifiering av realdel och imaginärdel ger ekvationerna

$$\begin{cases} (Re): & 4a^4 - 14a^2 - 8 = 0 \\ (Im): & -4a^3 + 16a = 0. \end{cases}$$

Imaginärdelsekvationen är enklast. Den ger $a = 0$ eller $a = \pm 2$. Kontroll av dessa visar att $a = \pm 2$ är lösningar även till realdelsekvationen. Således innehåller $p(z)$ faktorerna $(z - 2i)(z + 2i) = (z^2 + 4)$. Polynomdivision ger att

$$p(z) = (z^2+4)(4z^2+4z-2) = 4(z^2+4)\left(z^2 + z - \frac{1}{2}\right) = 4(z^2+4)\left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) =$$

$$4(z^2+1)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (z^2+1)(2z+1+\sqrt{3})(2z+1-\sqrt{3}).$$

(kontrollera genom att multiplicera ihop dina faktorer)

Svar: $p(z) = (z^2+1)(2z+1+\sqrt{3})(2z+1-\sqrt{3})$.