Lösningsskiss till övningsdugga 2, nummer 1, i Matematisk grundkurs

(Observera att detta är förslag på lösningar, det kan finnas andra vägar också)

1. (a) $\sum_{k=12}^{154}(6k+2)$ är en aritmetisk summa med första term $=(6\cdot 12+2)$, sista term$=$ $(6\cdot 154+2)$ och med antal termer$=154-12+1=143$.

   Således är $\sum_{k=12}^{154}(6k+2) = \dfrac{(6\cdot 12+2)+(6\cdot 154+2)}{2}\cdot 143 = 500\cdot 143 = 71500.$

   Svar: 71500.

   (b) Båda led är positiva och ln är injektiv, så $3\cdot 2^x = 4\cdot 5^x \iff \ln(3\cdot 2^x) = \ln(4\cdot 5^x) \iff \ln 3 + x\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5 \iff (\ln 5-\ln 2)x = \ln 3 - \ln 4 \iff x = \dfrac{\ln 3-\ln 4}{\ln 5-\ln 2}$.

   Svar: $x = \dfrac{\ln 3-\ln 4}{\ln 5-\ln 2}$.

   (c) Eftersom $0<\arctan 3<\pi/2$, så kan $\arctan 3$ illustreras i en triangel, med motstående sida$=3$ och närliggande sida$=1$, och hypotenusan$=\sqrt{10}$ (enl Pythagoras sats). Således är $\cos(\arctan 3) = 1/\sqrt{10}$.

   Svar: $1/\sqrt{10}$.

   (d) $\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

   Svar: $\dfrac{\pi}{4}$.

   (e) $$\sin 3v = \sin\left(v-\frac{\pi}{5}\right) \iff \begin{cases} 3v = v-\dfrac{\pi}{5}+2n\pi \\ \text{eller} \\ 3v = \pi-\left(v-\dfrac{\pi}{5}\right)+2n\pi \end{cases} \iff$$

   $$\iff \begin{cases} v = -\dfrac{\pi}{10}+n\pi \\ \text{eller} \\ v = \dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{n\pi}{2} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

   Svar: $v = -\dfrac{\pi}{10}+n\pi$ eller $v = \dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{n\pi}{2}$ där n är heltal.

2. $\dfrac{x}{x-1} \le \dfrac{6}{x+1} \iff \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{6}{x+1} \le 0 \iff \dfrac{x(x+1)-6(x-1)}{(x-1)(x+1)} \le 0 \iff \dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)(x+1)} \le 0 \iff \Big/\text{faktorisera}\Big/ \iff \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \le 0$. Teckentabellen

x		-1		1		2		3	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$	0	$+$
$\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $-1<x<1$ eller $2\le x\le 3$.

Svar: $-1<x<1$ eller $2\le x\le 3$.

3. Logaritmerna är definierade förutsatt att $5-2x>0$, $x-1>0$ och $3-x>0$, dvs då $1<x<\dfrac{5}{2}$. För dessa x fås

   $\ln(5-2x) = 2\ln(x-1)-\ln(3-x) \iff \ln((5-2x)(3-x)) = \ln(x-1)^2 \iff$

$\Big/$ ln är injektiv $\Big/ \iff (5-2x)(3-x) = (x-1)^2 \iff \Big/$ lös andragradsekvationen $\Big/ \iff$

$\iff x = 7$ eller $x = 2$. Men eftersom $1 < x < \dfrac{5}{2}$ så följer att enda lösningen är $x = 2$.

Svar: $x = 2$.

4. $6 \cdot 8^x + 1 = 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} \iff 6 \cdot \left(2^3\right)^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 5 \cdot \left(2^2\right)^x \iff$
$\iff 6 \cdot 2^{3x} + 1 = 2 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{2x} \iff 6 \cdot (2^x)^3 + 1 = 2 \cdot 2^x + 5 \cdot (2^x)^2$. Med $t = 2^x > 0$ fås $6t^3 + 1 = 2t + 5t^2 = 0 \iff 6t^3 - 5t^2 - 2t + 1 = 0$. Prövning visar att $t = 1$ är en lösning. Polynomdivision och lösning av återstående andragradsekvation visar sedan att $t = 1,\ t = 1/3$ eller $t = -1/2$, men eftersom $t > 0$ så duger bara $t = 1$ och $t = 1/3$. Slutligen fås att $2^x = 1 \iff x = 0$ och $2^x = \dfrac{1}{3} \iff x \ln 2 = \ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3 \iff$
$\iff x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Svar: $x = 0$ eller $x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

5. Eulers formler ger $\sin 2x \cos^2 4x = \dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) =$

$$\frac{1}{8i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right) \cdot \left(e^{8ix} + 2 + e^{-8ix}\right) = \frac{1}{8i}\left(e^{10ix} + 2e^{2ix} + e^{-6ix} - e^{6ix} - 2e^{-2ix} - e^{-10ix}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{e^{10ix} - e^{-10ix}}{2i} - \frac{e^{6ix} - e^{-6ix}}{2i} + 2 \cdot \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right) = \frac{1}{4}(\sin 10x - \sin 6x + 2\sin 2x).$$

Svar: $\dfrac{1}{4}(\sin 10x - \sin 6x + 2\sin 2x)$.

6. Vi har ekvationen $2\sin^2 x + \sin x = 1$. Sätt $t = \sin x$ så fås ekvationen $2t^2 + t = 1$, som har lösningarna $t = -1$ eller $t = \dfrac{1}{2}$, dvs $\sin x = -1$ eller $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

där n är heltal

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

7. $\cos v - \sin v = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos v - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin v\right) = \Big/ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ har en lösning $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} \Big/ = \sqrt{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos v + \cos\dfrac{3\pi}{4}\sin v\right) = \sqrt{2}\sin\left(v + \dfrac{3\pi}{4}\right)$, så

$$\cos v - \sin v = 1 \iff \sqrt{2}\sin\left(v + \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \iff \sin\left(v + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ v + \dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} v = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ v = 2n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $v = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ eller $v = 2n\pi$ där n är heltal.

8. Vi börjar med definitionsmängden. Till att börja med måste $x > 0$ för att logaritmerna

ska vara definierade. Dessutom måste $\ln 2x \neq 0$, dvs $x \neq 1/2$. Inga övriga krav finns, alltså är $D_f = \{x :\ x > 0 \text{ och } x \neq 1/2\}$. För dessa x fås att

$y = e^{(1+\ln x)/(\ln 2x)} \iff \ln y = \dfrac{1+\ln x}{\ln 2x} = \dfrac{1+\ln x}{\ln 2 + \ln x} \iff (\ln 2 + \ln x)\ln y = 1 + \ln x \iff (1-\ln y)\ln x = \ln 2 \cdot \ln y - 1 \iff \ln x = \dfrac{\ln 2 \cdot \ln y - 1}{(1-\ln y)} \iff$
$x = e^{(\ln 2\cdot\ln y - 1)/(1-\ln y)}$. eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så har vi visat att inversen finns, samtidigt som vi funnit uttrycket för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = \{x :\ x > 0 \text{ och } x \neq 1/2\}$ och $f^{-1}(x) = e^{(\ln 2\cdot\ln x - 1)/(1-\ln x)}$.

9. Skriv $z + 2i$ och $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ på polär form. Rita in punkterna $1+i$ och $1-i\sqrt{3}$ i komplexa talplanet så blir det enklare. Vi får $z+2i = re^{iv}$ och $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} =$
$\dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4+i\pi/3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{7\pi i/12}$ och detta ger ekvationen $\left(re^{iv}\right)^5 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{7\pi i/12} \iff$
$r^5e^{5iv} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{7\pi i/12}$. Identifiera belopp och argument:

$$\begin{cases} (Abs:)\ r^5 = 2^{-1/2} \\ (Arg:)\ 5v = \dfrac{7\pi}{12} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2^{-1/10} \\ 5v = \dfrac{7\pi}{60} + \dfrac{2n\pi}{5} \end{cases} \quad \text{så } z + 2i = 2^{-1/10}e^{(7\pi/60 + 2n\pi/5)i}$$

dvs $z = 2^{-1/10}e^{(7\pi/60+2n\pi/5)i} - 2i$, där de fem olika lösningarna fås med $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Svar: $z = 2^{-1/10}e^{(7\pi/60+2n\pi/5)i} - 2i$, där $n = 0, 1, 2, 3, 4$.