Lösningsskiss till övningsdugga 2, nummer 2, i Matematisk grundkurs

(Observera att detta är förslag på lösningar, det kan finnas andra vägar också)

1. (a) $\dfrac{1+2i}{3i-2} = \dfrac{(1+2i)(3i+2)}{(3i-2)(3i+2)} = \dfrac{-4+7i}{13} = -\dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}i$, så $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1+2i}{3i-2}\right) = \dfrac{7}{13}$.

Svar: $\dfrac{7}{13}$.

(b) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right) = 1 \iff \sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x+\dfrac{\pi}{5} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$ dvs

$x = -\dfrac{\pi}{30} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{19\pi}{30} + 2n\pi$ där n är heltal.

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{30} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{19\pi}{30} + 2n\pi$ där n är heltal.

(c) Vi ser att $v = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, eftersom $0 < \dfrac{1}{\sqrt{6}} < 1$. En hjälptriangel med motstående katet $= 1$ och hypotenusa $= \sqrt{6}$ visar att $\tan v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(d) $\cos\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) \iff 2t-\dfrac{\pi}{3} = \pm\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)+2n\pi \iff t = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ eller $3t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, dvs då $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$ eller $t = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2n\pi}{3}$, där n är heltal.

Svar: $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$ eller $t = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2n\pi}{3}$, där n är heltal.

(e) Vi ser att $v = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, eftersom $0 < \dfrac{1}{\sqrt{6}} < 1$. En hjälptriangel med motstående katet $= 1$ och hypotenusa $= \sqrt{6}$ visar att $\tan v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(f) Logaritmlagar och det faktum att exp och ln är varandras inverser visar att

$$\frac{e^{3\ln 3} - e^{-\ln 3}}{(\ln(e^{-3}))^3} = \frac{e^{\ln 3^3} - e^{\ln\frac{1}{3}}}{(-3)^3} = \frac{3^3 - \frac{1}{3}}{-3^3} = \frac{27-\frac{1}{3}}{-27} = -\frac{80}{81}.$$

Svar: $-\dfrac{80}{81}$.

2. Vi gör falluppdelning:

$|2-x| = \begin{cases} 2-x & , \text{ då } x \le 2 \\ x-2 & , \text{ då } x \ge 2. \end{cases}$ och $|x-5| = \begin{cases} x-5 & , \text{ då } x \ge 5 \\ 5-x & , \text{ då } x \le 5 \end{cases}$

Vi får alltså tre fall

- Om $x \le 2$ så fås
  $|x-5| + x = |2-x| \iff 5-x+x = 2-x \iff x = -3$, som ligger i intervallet.
- Om $2 \le x \le 5$ så fås
  $|x-5|+x = |2-x| \iff 5-x+x = x-2 \iff x = 7$, som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.

- Om $x \geq 5$ så fås
  $|x-5|+x=|2-x| \iff x-5+x=x-2 \iff x=3$ som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.

Svar: $x=-3$.

3. För $2<x<3$ är $y=\ln(3-x)-\ln(x-2) \iff y=\ln\dfrac{3-x}{x-2} \iff \Big/ \ln$ är injektiv$\Big/ \iff$
   $\iff e^y=\dfrac{3-x}{x-2} \iff (x-2)e^y=3-x \iff x(e^y+1)=2e^y+3 \iff x=\dfrac{2e^y+3}{e^y+1}$ och eftersom varje x ger högst ett y-värde har vi både visat att inversen finns och samtidigt tagit fram ett uttryck för den: $f^{-1}(y)=\dfrac{2e^y+3}{e^y+1}$.

   Svar: $f^{-1}(x)=\dfrac{2e^x+3}{e^x+1}$.

4. $3e^{3x}-e^{2x}=12e^x-4 \iff 3(e^x)^3-(e^x)^2=12e^x-4$. Med $t=e^x>0$ så kan vi skriva om ekvationen till $3t^3-t^2=12t-4 \iff 3t^3-t^2-12t+4=0$. Prövning visar att $t=2$ är en lösning. Polynomdivision och lösning av andragradsekvation visar därefter att $t=2,\ t=-2$ eller $t=1/3$. Men eftersom $t>0$ så är enda lösningen $t=2$. Slutligen fås $e^x=t=2 \iff x=\ln 2$. Svar $x=\ln 2$.

5. $\sin x-\sqrt{3}\cos x = \Big/$ bryt ut $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2\Big/ = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=$
   $=\Big/\cos v=\dfrac{1}{2},\ \sin v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ har lösningen $v=-\dfrac{\pi}{3}$ i det givna intervallet$\Big/=$
   $=2\left(\sin x\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos x\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

   Svar: $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

6. Skriv $z+1$ och $-2i$ på polär form. Rita in punkten $z=-2i$ i det komplexa talplanet så blir det enklare: $z+1=re^{iv}$ och $-2i=2e^{i\pi}$. Då följer att
   $\left(re^{iv}\right)^3=2e^{i\pi} \iff r^3e^{3iv}=2e^{iv}$ och identifiering av absolutbelopp och argument ger
   $\begin{cases}(Abs{:})\ r^3=2\\(Arg{:})\ 3v=\pi+2n\pi\end{cases} \iff \begin{cases}r=2^{1/3}\\v=\pi/3+2n\pi/3\end{cases}$ så $z+1=2^{1/3}e^{(\pi/3+2n\pi/3)i}$, dvs
   $z=2^{1/3}e^{(\pi/3+2n\pi/3)i}-1$, där de tre olika lösningarna fås med $n=0,1,2$ (t ex).

   Svar: $z=2^{1/3}e^{(\pi/3+2n\pi/3)i}-1$, där $n=0,1,2$.

7. Omskrivning med Eulers formler ger $\cos 7x\sin^2 3x=\left(\dfrac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^2=$
   $\dfrac{1}{-8}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}\right)\left(e^{6ix}-2+e^{-6ix}\right)=-\dfrac{1}{8}\left(e^{13ix}+e^{ix}+e^{-ix}+e^{-13ix}-2\left(e^{7ix}+e^{-7ix}\right)\right)=$
   $\dfrac{1}{4}(2\cos 7x-\cos x-\cos 13x)$. Således fås
   $4\cos 7x\sin^2 3x=\cos x-\cos 13x \iff 2\cos 7x-\cos x-\cos 13x=\cos x-\cos 13x \iff$
   $\cos 7x=\cos x \iff 7x=\pm x+2n\pi \iff x=n\pi/3$ eller $x=n\pi/4$, där n är heltal.

   Svar: $x=n\pi/3$ eller $x=n\pi/4$, där n är heltal.

8. Summan är geometrisk, dvs den har formen

$$s = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + ... + aq^n$$

där första termen är a och kvoten är q. I uppgiften är givet att

$$\begin{cases} a - aq^2 = 2 \\ a + aq + aq^2 + aq^3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a(1-q^2) = 2 \\ a\dfrac{1-q^4}{1-q} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a(1-q^2) = 2 \\ a\dfrac{(1-q^2)(1+q^2)}{1-q} = 5. \end{cases}$$

Sambandet $a(1-q^2) = 2$ insatt i den andra ekvationen ger

$$\frac{2(1+q^2)}{1-q} = 5 \iff 2(1+q^2) = 5(1-q) \iff q = -3 \text{ eller } q = 1/2.$$

- $q = -3$ ger (i första ekvationen) att $a = \dfrac{2}{(1-(-3)^2)} = -\dfrac{1}{4}$ och femte termen $aq^4 = -\dfrac{1}{4} \cdot (-3)^4 = -\dfrac{81}{4}$
- $q = \dfrac{1}{2}$ ger $a = \dfrac{2}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{8}{3}$ och femte termen $aq^4 = \dfrac{8}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{6}$.

Svar: Femte termen är $-\dfrac{81}{4}$ eller $\dfrac{1}{6}$.

9. Eftersom $3 > 0$ och $-1 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$ så är $0 < \arctan 3 < \dfrac{\pi}{2}$ och $\dfrac{\pi}{2} < \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) < \pi$

dvs $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Dessutom är $\tan\alpha = \dfrac{\tan(\arctan 3) + \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1 - \tan\arctan 3) \cdot \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}$.

$\tan(\arctan 3) = 3$ och $\tan\left(\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \dfrac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} =$

$$= \Big/ \sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{eftersom } \sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) > 0 \Big/ = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

Således är $\tan\alpha = \dfrac{3-\frac{1}{2}}{1-3\cdot(-\frac{1}{2})} = 1$, så $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n. Av dessa vinklar är det endast $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$ som uppfyller villkoret $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, dvs $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

Svar: $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.