Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Martin Bengtsson

Lösningar till dugga 1
Matematisk grundkurs TATA68
2015-09-11, kl. 8-11

---

1. (a) $f(x) = 2x^2 - 10x + 14 = 2(x^2 - 5x + 14) = 2\left(x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7\right) = 2\left((x-5/2)^2 - \frac{25}{4} + \frac{28}{4}\right) = 2(x-5/2)^2 + \frac{3}{2}$. Då $(x-5/2)^2$ är $=0$ som minst blir minsta värdet som $f(x)$ kan anta $\frac{3}{2}$.

   Svar: $\frac{3}{2}$.

   (b) Om vi gissar lösningar till ekvationen $p(x) = 0$ hittar vi roten $x = -1$ och $p(x) = 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 10x - 3$ är därmed delbart med $x+1$. Faktorisering med hjälp av polynomdivision ger $p(x) = (x+1)(4x^3 - 7x - 3)$.
   Därefter gissar vi lösning till tredjegradsekvationen $4x^3 - 7x - 3 = 0$ och hittar på nytt att $x = -1$ är en lösning. Efter ny division med $x+1$ fås: $p(x) = (x+1)(x+1)(4x^2 - 4x - 3)$
   Kvadratkomplettera andragradsuttrycket och använd därefter konjugatregeln:
   $p(x) = (x+1)(x+1)(4x^2 - 4x - 3) =$
   $4(x+1)(x+1)(x^2 - x + (1/2)^2 - (1/2)^2 - 3/4) =$
   $4(x+1)(x+1)((x-1/2)^2 - 1) = 4(x+1)(x+1)(x-3/2)(x+1/2)$

   Svar: $p(x) = 4(x+1)(x+1)(x-3/2)(x+1/2)$

2. $\dfrac{6-x}{x+2} < x - 1 \Leftrightarrow$

   $\dfrac{6-x}{x+2} - \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{6 - x - (x^2 + x - 2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$

   $\dfrac{-x^2 - 2x + 8}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-((x+1)^2 - 9)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+4)}{x+2} > 0 \Leftrightarrow$

   $\dfrac{(x-2)(x+4)}{x+2} > 0$

   Teckentabell med $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+4)}{x+2}$

x		-4		-2		2	
$x+4$	-	0	+		+		+
$x+2$	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	$\nexists$	-	0	+

   $f(x) > 0$ då $-4 < x < -2$ eller $x > 2$

   Svar: $-4 < x < -2$ eller $x > 2$

3.
$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{om } 2x-1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1/2 \\ 1-2x & \text{om } 2x-1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 1/2 \end{cases}$$
$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x+2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2 \\ -x-2 & \text{om } x+2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2 \end{cases}$$

Vi får fallen:
Fall 1: $x < -2$

$|2x-1|+|x+2| = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 1-2x-x-2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 5x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -3/5$
$x = -3/5$ uppfyller ej villkoret för fall 1 och är därmed en falsk rot.
Fall 2: $-2 \leq x \leq 1/2$

$|2x-1|+|x+2| = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 1-2x+x+2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 3x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 1/3$
$x = 1/3$ uppfyller villkoret för fall 2 och är därmed en lösning.
Fall 3: $x \geq 1/2$

$|2x-1|+|x+2| = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; 2x-1+x+2 = 2x+2 \;\Leftrightarrow\; x = 1$
$x = 1$ uppfyller villkoret för fall 3 och är därmed en lösning.

Svar: $x = 1/3$ eller $x = 1$

4. (a) $\dfrac{3-2i}{5+2i} = \dfrac{(3-2i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \dfrac{15-16i+4i^2}{25-4i^2} = \dfrac{11-16i}{29} = \dfrac{11}{29} - i\dfrac{16}{29}$

Svar: $\dfrac{11}{29} - i\dfrac{16}{29}$

(b) $\dfrac{|1+i|^3|3-4i|}{|-1+i|} = \dfrac{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^3 \cdot \sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}\cdot 5}{\sqrt{2}} = 10$

Svar: 10

(c) Med ansättningen $z = x+iy$ där x och y är reella tal fås
$(2+3i)(x+iy)+x-iy = 5-2i \;\Leftrightarrow\; 2x+2iy+3ix-3y+x-iy = 5-2i \;\Leftrightarrow\; 3x-3y+i(3x+y) = 5-2i.$
Två komplexa tal är bara lika om deras realdelar är lika och deras imaginärdelar är lika. Vilket här ger $3x-3y = 5$ och $3x+y = -2$
Vilket ger $-4y = 5-(-2) = 7 \;\Leftrightarrow\; y = -7/4$ och $x = (-2-y)/3 = (-2+7/4)/3 = -1/12$ som ger svaret $z = -1/12 - i\cdot 7/4$

Svar: $z = -1/12 - i\cdot 7/4$

5. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=a \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x-a}=a-\sqrt{x+a}$
$VL=\sqrt{x-a}\geq 0$ ger att $HL=a-\sqrt{x+a}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; a\geq\sqrt{x+a}\geq 0$

Endast för dessa värden på a kan vi finna x som löser ekvationen och för dessa a gäller det att:

$\sqrt{x-a}=a-\sqrt{x+a} \;\Leftrightarrow\; x-a=a^2-2a\sqrt{x+a}+x+a \;\Leftrightarrow$
$2a\sqrt{x+a}=a^2+2a$

$a=0$ i ursprungsekvationen ger $2\sqrt{x}=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ och
$a\neq 0$ gör att vi kan dividera VL och HL med a. För $a\geq\sqrt{x+a}\geq 0$ och $a\neq 0$ (och därmed även $a+2>0$) fås:

$2\sqrt{x+a}=a+2 \;\Leftrightarrow\; 4(x+a)=a^2+4a+4 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{a^2+4}{4}=\frac{a^2}{4}+1$

Kontroll mot olikheten $a\geq\sqrt{x+a}$ ger för $a\geq 0$ och $x=\frac{a^2}{4}+1$:

$a\geq\sqrt{x+a} \;\Leftrightarrow\; a^2\geq x+a=\frac{a^2}{4}+1+a \;\Leftrightarrow\; \frac{3a^2}{4}-a-1\geq 0 \;\Leftrightarrow$
$a^2-\frac{4a}{3}-\frac{4}{3}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-2/3)^2-\frac{4}{9}-\frac{12}{9}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-2/3)^2\geq\frac{16}{9} \;\Leftrightarrow\; a\geq 2$

Där det i sista ekvivalensen utnyttjats att $a\geq 0$

Svar: För $a=0$ löser $x=0$ ekvationen, för $a\geq 2$ löser $x=\frac{a^2}{4}+1$ ekvationen, för övriga värden på a saknas lösning.