Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Martin Bengtsson

Lösningar till dugga 1
Matematisk grundkurs TATA68
2015-10-10, kl. 8-11

---

1. (a) $\dfrac{5-4i}{2+i} = \dfrac{(5-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{10-5i-8i+4i^2}{4-i^2} = \dfrac{6-13i}{5} = \dfrac{6}{5} - \dfrac{13i}{5}$

   Svar: $\dfrac{6}{5} - \dfrac{13i}{5}$

   (b)
$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ -x-2 & \text{om } x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \end{cases}$$

   Vi får fallen:
   Fall 1: $x \leq -2$
   $|x+2| = 5 \Leftrightarrow -x-2 = 5 \Leftrightarrow x = -7$
   $x = -7$ uppfyller villkoret för fall 1 och är därmed en lösning.
   Fall 2: $-2 \leq x$
   $|x+2| = 5 \Leftrightarrow x+2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$
   $x = 3$ uppfyller villkoret för fall 2 och är därmed en lösning.

   Svar: $x = -7$ eller $x = 3$

   (c)
$$\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

   Svar: 14

2. $\sqrt{6x+4} = 2x-2 \Rightarrow 6x+4 = (2x-2)^2 = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow$

   $4x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-7/2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 7/2$. Då vi inte har ekvivalens hela vägen MÅSTE alla lösningar kontrolleras i den ursprungliga ekvationen.

   $x = 0$ ger: $VL = \sqrt{6 \cdot 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$ och $HL = 2 \cdot 0 - 2 = -2$ dvs $VL \neq HL$ och $x = 0$ är därmed inte en lösning.

   $x = 7/2$ ger: $VL = \sqrt{6 \cdot 7/2 + 4} = \sqrt{21+4} = 5$ och $HL = 2 \cdot 7/2 - 2 = 5$ dvs $VL = HL$ och $x = 7/2$ är därmed en lösning.

   Svar: $7/2$

3. $\dfrac{x-2}{x-3} > \dfrac{2}{2x-7} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{(x-2)(2x-7)}{(x-3)(2x-7)} - \dfrac{2(x-3)}{(2x-7)(x-3)} > 0 \;\Leftrightarrow$

$$\frac{2x^2-11x+14-(2x-6)}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2-13x+20}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-\frac{13x}{2}+10}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{160}{16}}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(x-\frac{16}{4}\right)\left(x-\frac{10}{4}\right)}{(x-3)(2x-7)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-4)(x-5/2)}{(x-3)(2x-7)} > 0$$

Teckentabell med $f(x) = \dfrac{(x-4)(x-5/2)}{(x-3)(2x-7)}$

x		$5/2$		3		$7/2$		4	
$x-5/2$	-	0	+		+		+		+
$x-3$	-		-	0	+		+		+
$2x-7$	-		-		-	0	+		+
$x-4$	-		-		-		-	0	+
$f(x)$	+	0	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-	0	+

$f(x) > 0$ då $x < 5/2$, $3 < x < 7/2$ eller $x > 4$

<u>Svar:</u> $x < 5/2$, $3 < x < 7/2$ eller $x > 4$

4. Om vi gissar komplexa rötter till ekvationen $z^4-4z^3+14z^2-4z+13=0$ så hittas $z=i$ som en rot ($i^4-4i^3+14i^2-4i+13 = 1+4i-14-4i+13=0$). Alla koefficienter är reella och konjugatet till i, (dvs $-i$) är därmed också en lösning.
$z-i$ och $z+i$ är faktorer till vänsterledet som kan faktoriseras med hjälp av en polynomdivision där vi dividerar med $(z-i)(z+i)=z^2+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & z^2 & - & 4z & + & 13 & & & & & & \\
\hline
 & z^4 & - & 4z^3 & + & 14z^2 & - & 4z & + & 13 & & z^2+1 \\
- & (z^4 & + & z^2) & & & & & & & & \\
\hline
 & & & -4z^3 & + & 13z^2 & - & 4z & + & 13 & & \\
 & & - & (-4z^3 & - & 4z) & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 13z^2 & + & 13 & & & & \\
 & & & & - & (13z^2 & + & 13) & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Den ursprungliga ekvationen är ekvivalent med

$(z-i)(z+i)(z^2-4z+13)=0 \;\Leftrightarrow\; (z-i)(z+i)\left((z-2)^2-4+13\right)=0 \;\Leftrightarrow$
$(z-i)(z+1)\left((z-2)^2-(3i)^2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; (z-i)(z+i)(z-2+3i)(z-2-3i)=0$

Som ger de fyra lösningarna $z=i$, $z=-i$, $z=2-3i$ och $z=2+3i$.

<u>Svar:</u> $z=\pm i$ eller $z=2\pm 3i$

5. Linjens ekvation: $y = ax$ och cirkelns ekvation: $(x-4)^2 + (y-a)^2 = 2^2$ ger tillsammans ett ekvationssystem som vi vill ska sakna reella lösningar (varje reell lösning betyder en gemensam punkt).
Vi byter ut y mot ax i cirkelns ekvation för att reducera systemet till en ekvation med en obekant (x).

$(x-4)^2 + (ax-a)^2 = 4 \iff x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = 4 \iff$

$x^2(1+a^2) - 2x(4+a^2) + 12 + a^2 = 0 \iff / \ a^2 + 1 \neq 0 \ / \iff$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{4+a^2}{1+a^2} + \frac{12+a^2}{1+a^2} = 0 \iff \left(x - \frac{4+a^2}{1+a^2}\right)^2 - \left(\frac{4+a^2}{1+a^2}\right)^2 + \frac{12+a^2}{1+a^2} = 0 \iff$$

$$\left(x - \frac{4+a^2}{1+a^2}\right)^2 = \frac{16 + 8a^2 + a^4 - (12 + 13a^2 + a^4)}{(1+a^2)^2} = \frac{4-5a^2}{(1+a^2)^2}$$

Ekvationen saknar reella lösningar om och endast om
$4 - 5a^2 < 0 \iff a^2 > \frac{4}{5} \iff a < -\frac{2}{\sqrt{5}}$ eller $a > \frac{2}{\sqrt{5}}$

Svar:
Cirkeln och den räta linjen saknar gemensamma punkter om $a < -\frac{2}{\sqrt{5}}$ eller $a > \frac{2}{\sqrt{5}}$