Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Marcus Kardell

Lösningar till dugga 1
Matematisk grundkurs TATA68
2016-09-09, kl. 8-11

---

1. $\dfrac{2x+1}{x+2} < x \Leftrightarrow 0 < x - \dfrac{2x+1}{x+2} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x(x+2)-(2x+1)}{x+2} \Leftrightarrow$
$0 < \dfrac{x^2-1}{x+2} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+2}.$

   Teckentabell med $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+2}$

x		-2		-1		1	
$x+1$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+		+
$f(x)$	-	$\nexists$	+	0	-	0	+

   Alltså är $f(x) > 0$ då $-2 < x < -1$ eller $x > 1$.

   Svar: $-2 < x < -1$ eller $x > 1$.
   (Lämplig kontroll: Sätt in $x = -3$, -3/2, 0, 2 i ursprungsolikheten.)

2. (a) Implikationen kan inte gälla! Den högra olikheten säger att $x \neq 2$, men $x = 2$ uppfyller den vänstra olikheten.

   Svar: Nej, påståendet gäller inte för alla x.

   (b) $\binom{50}{48} - \binom{10}{7} = \binom{50}{2} - \binom{10}{3} = \frac{50\cdot 49}{1\cdot 2} - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 1225 - 120 = 1105.$

   Svar: 1105.

   (c) $s = 1+4+7+\cdots+40+43 \Leftrightarrow$ /Alt: aritmetisk summa, 15 termer/
   $2s = (1+4+7+\cdots+40+43) + (43+40+37+\cdots+4+1) \Leftrightarrow$
   $2s = 44+44+44+\cdots+44+44 \Leftrightarrow 2s = 44\cdot 15 \Leftrightarrow s = 22\cdot 15 = 330.$

   Svar: $s = 330$.

3. Definitionen av absolutbelopp ger:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x \leq 0, \end{cases}$$

   samt

$$|3x-5| = \begin{cases} 3x-5 & \text{om } 3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5/3, \\ -(3x-5) & \text{om } 3x-5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5/3. \end{cases}$$

   Vi får fallen:

Fall 1: $x \leq 0$

$|x| - |3x - 5| = x - 2 \Leftrightarrow -x + 3x - 5 = x - 2 \Leftrightarrow x = 3$
$x = 3$ uppfyller ej villkoret för fall 1 och är därmed en falsk rot.
Fall 2: $0 \leq x \leq 5/3$

$|x| - |3x - 5| = x - 2 \Leftrightarrow x + 3x - 5 = x - 2 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$
$x = 1$ uppfyller villkoret för fall 2 och är därmed en lösning.
Fall 3: $x \geq 5/3$

$|x| - |3x - 5| = x - 2 \Leftrightarrow x - 3x + 5 = x - 2 \Leftrightarrow 7 = 3x \Leftrightarrow x = 7/3$
$x = 7/3$ uppfyller villkoret för fall 3 och är därmed en lösning.

<u>**Svar:**</u> $x = 1$ eller $x = 7/3$. (Kontroll: Sätt in i ursprungsekvationen)

4. (a) $\overline{z} = 1 + \dfrac{2}{3-i} = \dfrac{5-i}{3-i} = \dfrac{(5-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{16+2i}{10} = \dfrac{8+i}{5} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow z = \dfrac{8-i}{5}.$

   <u>**Svar:**</u> z = 8/5 - i/5.

   (b) $z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 6z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 - 5z^2 + 8z - 6) = 0 \Leftrightarrow$

   / Prövning ger att $z = 3$ är en rot. Polynomdivision ger /

   $\Leftrightarrow z(z-3)(z^2 - 2z + 2) = 0$. (Kontrollera!)

   Den sista faktorn kvadratkompletteras:
   $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 \Leftrightarrow z = 1 \pm i.$

   <u>**Svar:**</u> $z_1 = 0, z_2 = 3, z_{3,4} = 1 \pm i.$

5. Ställ up ekvationerna för cirklarna! Skärningspunkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 9. \end{cases}$$

Subtrahera ekvation 2 från ekvation 1 för att få hjälpekvationen

$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) + y^2 - (y^2 - 6y + 9) = 25 - 9 \Leftrightarrow 2x + 6y = 26,$$

som ger $y = -x/3 + 13/3$ (vilket även är ekvationen för den sökta linjen!) Insättning i ekvation 1 ger den något trassliga andragradsekvationen

$$x^2 + (-x/3 + 13/3)^2 = 25,$$

med lösningar $x = 4$ eller $x = -7/5$, vilket i sin tur ger $y = 3$ eller $y = 24/5$.

<u>**Svar:**</u> Skärningspunkter i $(4, 3)$ och $(-7/5, 24/5)$. Linjens ekvation är $y = -x/3 + 13/3$.