Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Marcus Kardell

Lösningar till dugga 1
Matematisk grundkurs TATA68
2016-09-09, kl. 8-11

---

1. (a) Minsta gemensamma nämnaren är $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ vilket ger

$$\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2x}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} - \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} + \frac{2x}{(x-y)(x+y)}$$
$$= \frac{(x-y)-(x+y)+2x}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{(x+y)}.$$

<u>Svar:</u> Uttrycket kan skrivas som $\dfrac{2}{(x+y)}$.

(b) Definitionen av absolutbelopp ger:

$$|2x-\sqrt{7}| = \begin{cases} 2x-\sqrt{7} & \text{om } 2x-\sqrt{7} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq \sqrt{7}/2, \\ \sqrt{7}-2x & \text{om } 2x-\sqrt{7} \leq 0 \ \Leftrightarrow \ x \leq \sqrt{7}/2, \end{cases}$$

Vi får fallen:
Fall 1: $x \geq \sqrt{7}/2$
$|2x-\sqrt{7}| = 5/4 \ \Leftrightarrow \ 2x-\sqrt{7} = 5/4 \ \Leftrightarrow \ 2x = \sqrt{7}+5/4 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{7}/2+5/8$.
$x = \sqrt{7}/2+5/8$ uppfyller villkoret för fall 1 och är därmed en lösning till ekvationen.
Fall 2: $x \leq \sqrt{7}/2$
$|2x-\sqrt{7}| = 5/4 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{7}-2x = 5/4 \ \Leftrightarrow \ 2x = \sqrt{7}-5/4 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{7}/2-5/8$.
$x = \sqrt{7}/2-5/8$ uppfyller villkoret för fall 2 och är därmed en lösning till ekvationen.

<u>Svar:</u> $x = \dfrac{4\sqrt{7}\pm 5}{8}$.

2. (a) Polynomet $p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 165x + 168 = 3(x^3 - 2x^2 - 55x + 56)$ har ett nollställe i $x = 1$. Faktorsatsen ger då att $p(x) = 3(x-1)q(x)$ där vi kan få fram $q(x) = x^2 - x - 56$ med hjälp av polynomdivision. Nollställen till $q(x)$ fås till exempel genom kvadratkomplettering:

$$x^2 - x - 56 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-1/2)^2 - 1/4 - 56 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$(x-1/2)^2 = 225/4 \ \Leftrightarrow \ x - 1/2 = \pm 15/2 \ \Leftrightarrow \ x = 8 \text{ eller } x = -7.$$

<u>Svar:</u> $p(x) = 3(x-1)(x-8)(x+7)$. (Kontrollera!)

(b) $(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+3)(n+2)!$ vilket gör att vi kan dividera med den nollskilda faktorn $(n+2)!$ i båda led. Vi får då ekvationen $n+3 = 47 \ \Leftrightarrow \ n = 44$.

<u>Svar:</u> $n = 44$.

3. (a) $\left|\dfrac{-3+4i}{2-i}\right| = \dfrac{|-3+4i|}{|2-i|} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+4^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$

Svar: $|z| = \sqrt{5}$.

(b) Binomialformeln ger direkt att

$$(x-y)^5 = x^5+5x^4\cdot(-y)^1+10x^3\cdot(-y)^2+10x^2\cdot(-y)^3+5x^1\cdot(-y)^4+(-y)^5,$$

där konstanterna $\{1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1\}$ kan avläsas från femte raden i Pascals triangel.

Svar: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$.

(c) Kvadratkomplettering med avseende på x och y ger

$$x^2-2x+y^2+8y=-8 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+4)^2-16=-8 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+4)^2=9,$$

vilket är ekvationen för en cirkel med radie 3 och mittpunkt i $(1,-4)$.

Svar: En cirkel med radie 3 och mittpunkt i $(1,-4)$

4. Vi har olikheterna $\dfrac{4}{x} \le x \le x^2-2$. Vi börjar med den vänstra och ser att

$$\frac{4}{x} \le x \Leftrightarrow x-\frac{4}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{x} \ge 0.$$

Teckentabell med $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x}$ ger att

x		-2		0		2	
x	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+		+
$f(x)$	-	0	+	Ej def!	-	0	+

Alltså är $f(x) \ge 0$ då $-2 \le x < 0$ eller $x \ge 2$. Den högra olikheten ger att

$$x \le x^2-2 \Leftrightarrow 0 \le x^2-x-2 \Leftrightarrow 0 \le (x-2)(x+1).$$

Ytterligare en teckentabell ger att denna olikhet är uppfylld då $x \ge 2$ eller $x \le -1$. Sammantaget ger detta att båda olikheterna är uppfyllda då $-2 \le x \le -1$ eller $x \ge 2$. (Rita tallinjer för att se överlappen mellan intervallen!)

Svar: $-2 \le x \le -1$ eller $x \ge 2$.
(Lämplig kontroll: Sätt in $x = -3$, -3/2, 1, 3 i ursprungsolikheterna.)

5. Vi får systemet $\begin{cases} a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5 = 70/27, \\ a+aq+aq^2 = 2. \end{cases}$

Sätt in ekvation (2) i ekvation (1) på två ställen, för att få hjälpekvationen

$$2+q^3\cdot 2 = 70/27 \Leftrightarrow 1+q^3 = 35/27 \Leftrightarrow q^3 = 8/27 \Leftrightarrow q = 2/3.$$

Från ekvation (2) löser vi ut $a = \dfrac{2}{1+2/3+4/9} = 18/19$, vilket ger att den fjärde termen är $aq^3 = \dfrac{18}{19}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{16}{57}$.

Svar: Den fjärde termen är $16/57$.