Lösningsskiss till dugga 1 i Matematisk grundkurs

2017–09–08

1. (a) Låt $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$. Prövning visar att $x = 1$ är ett nollställe till $p(x)$ och polynomdivision ger därefter att $\dfrac{p(x)}{x-1} = x^2 - 9$, så $p(x) = (x-1)(x^2-9) =$
$= (x-1)(x-3)(x+3)$.
(kontrollera genom att multiplicera ihop faktorerna)

Svar: $(x-1)(x-3)(x+3)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{67}(5-3k) = -4-7-10-\cdots-196$ är en aritmetisk summa (differens$=-3$) med första term$=-4$, sista term$=-196$ och med antal termer$= 67-3+1 = 65$. Således är $\displaystyle\sum_{k=3}^{67}(5-3k) = 65\cdot\frac{-4-196}{2} = -6500$.

Svar: -6500.

(c) Binomialutveckling av $(a+b)^5$, med $a = x$ och $b = 2y$, ger

$$(x+2y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(2y) + \binom{5}{2}x^3(2y)^2 + \binom{5}{3}x^2(2y)^3 + \binom{5}{4}x(2y)^4 + \binom{5}{5}(2y)^5 = \Big/\text{Pascals triangel}\Big/ = x^5 + 5x^4\cdot 2y + 10x^3\cdot 4y^2 + 10x^2\cdot 8y^3 + 5x\cdot 16y^4 + 32y^5 = x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5.$$

(kontrollera genom att sätta in några värden på x och y, t ex $x = y = 1$)

Svar: $x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$.

2. $$\frac{1}{2-x} \le \frac{1}{2x+3} \iff \frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2-x} \ge 0 \iff \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x-2} \iff \frac{(x-2)+(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} \ge 0 \iff \frac{3x+1}{(2x+3)(x-2)} \ge 0.$$ Teckentabellen

x		$-3/2$		$-1/3$		2	
$3x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{3x+1}{(2x+3)(x-2)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $-\dfrac{3}{2} < x \le -\dfrac{1}{3}$ eller $x > 2$.
(kontrollera rimligheten genom att t ex sätta in $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ och $x = 3$)

Svar: $-\dfrac{3}{2} < x \le -\dfrac{1}{3}$ eller $x > 2$.

3. Vi gör falluppdelning:

$$|2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & , \text{ då } x \ge -1 \\ -(2x+2) & , \text{ då } x \le -1 \end{cases} \quad \text{och } |x-1| = \begin{cases} x-1 & , \text{ då } x \ge 1 \\ -(x-1) & , \text{ då } x \le 1. \end{cases}$$

Vi får alltså tre fall

- Om $x \le -1$ så fås
$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff -(2x+2) + (x-1) = 2 \iff x = -5$, som ligger i intervallet.
- Om $-1 \le x \le 1$ så fås
$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff (2x+2) + (x-1) = 2 \iff x = 1/3$ som ligger i intervallet.

- Om $x \geq 1$ så fås
$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff (2x+2) - (x-1) = 2 \iff x = -1$ som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.

(kontrollera genom direkt insättning i ursprungliga ekvationen)

Svar: $x = -5$ eller $x = 1/3$.

4. (a) $\dfrac{3-2i}{2+i} = \dfrac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{6-3i-4i-2}{4+1} = \dfrac{4-7i}{5} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}i.$

(kontrollera genom att beräkna $(2+i) \cdot \dfrac{4-7i}{5}$, det ska bli $3-2i$)

Svar: $\dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}i.$

(b) $z^2 + 2z = 2 - 4i \iff (z+1)^2 = 3 - 4i$. Ansätt $z + 1 = a + bi$, där a och b är reella, så fås $(a+bi)^2 = 3 - 4i \iff a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$. Identifiering av realdel, imaginärdel och belopp ger ekvationerna $\begin{cases} Re: & a^2 - b^2 = 3 \\ Im: & 2ab = -4 \\ Abs: & a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5. \end{cases}$

$Re + Abs$ ger därefter att $2a^2 = 8 \iff a = \pm 2$, och ur Im fås att om $a = 2$ så är $b = -1$, om $a = -2$ så är $b = 1$. Således är $z + 1 = 2 - i$, dvs $z = 1 - i$, eller $z + 1 = -2 + i$, dvs $z = -3 + i$.

(kontroll görs enklast via sambandet mellan rötter och koefficienter)

Svar: $z = 1 - i$ eller $z = -3 + i$.

5. OBS: RITA FIGUR (se nästa sida)

Låt (a, b) vara en punkt på cirkeln, dvs $a^2 + b^2 = 1$. Linjen genom (a, b) och $(0, 0)$ är normal till cirkeln och har lutningen $k_1 = \dfrac{b}{a}$. Linjen genom (a, b) och $(7, -4)$ har lutningen $k_2 = \dfrac{b+4}{a-7}$. Denna linje ska vara tangera cirkeln, så $k_1 \cdot k_2 = -1$. Således ska $\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{b+4}{a-7} = -1 \iff b(b+4) = -a(a-7) \iff a^2 + b^2 = 7a - 4b$. Dessutom ligger (a, b) på cirkeln, dvs $a^2 + b^2 = 1$, så vi har ekvationssystemet $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 7a - 4b \end{cases}$

Således är $7a - 4b = 1 \iff b = \dfrac{7a-1}{4}$, vilket insatt i den första ekvationen ger

$$a^2 + \left(\frac{7a-1}{4}\right)^2 = 1 \iff 16a^2 + 1 - 14a + 49a^2 = 16 \iff 65a^2 - 14a - 15 = 0 \iff$$

$$\iff a^2 - \frac{14}{65}a - \frac{15}{65} = 0 \iff a = \frac{7}{65} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{65}\right)^2 + \frac{15}{65}} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 15 \cdot 65}}{65} =$$

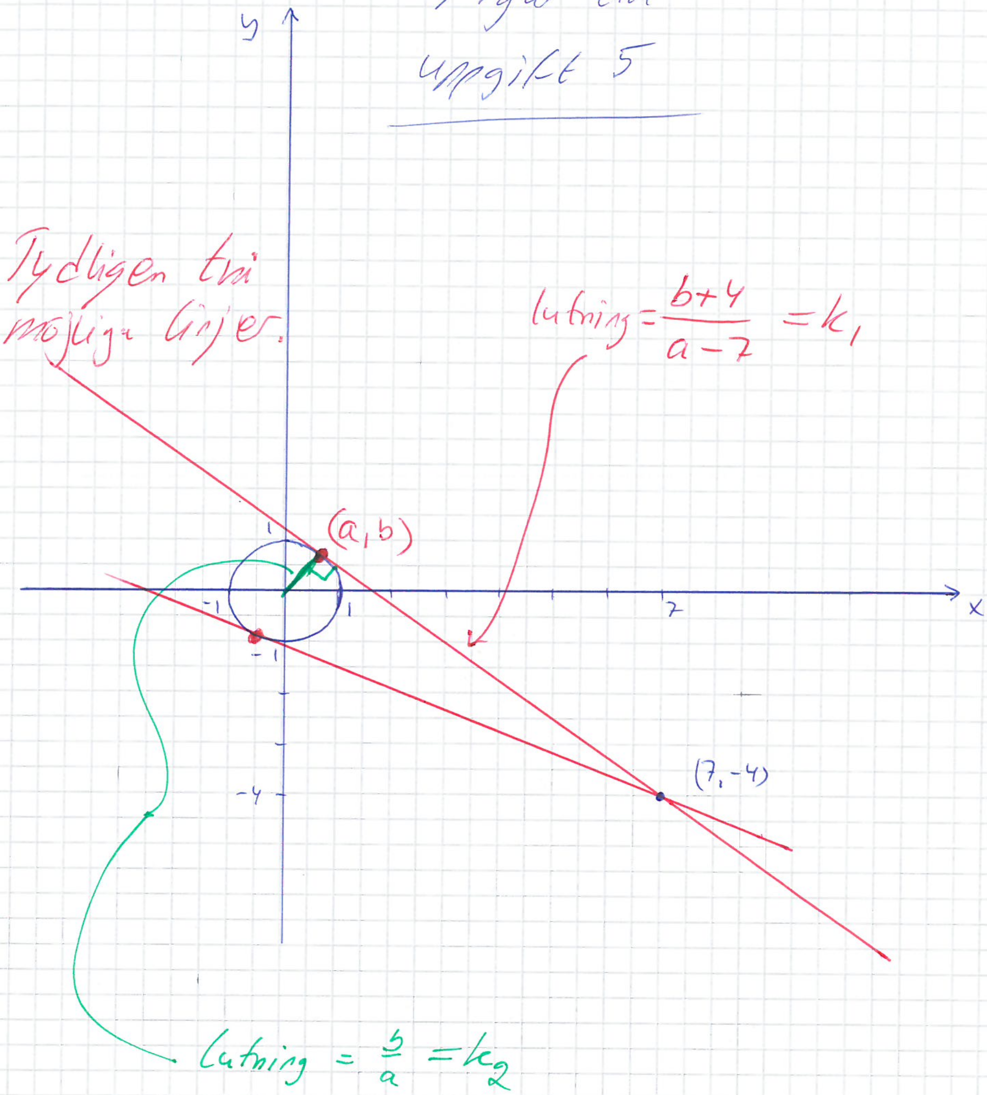
$$= \frac{7 \pm \sqrt{1024}}{65} = \frac{7 \pm \sqrt{2^{10}}}{65} = \frac{7 + 2^5}{65} = \frac{7 \pm 32}{65},$$ dvs $a = \dfrac{39}{65} = \dfrac{3 \cdot 13}{5 \cdot 13} = \dfrac{3}{5}$ eller

$a = -\dfrac{25}{65} = -\dfrac{5 \cdot 5}{5 \cdot 13} = -\dfrac{5}{13}$. Ur sambandet $b = \dfrac{7a-1}{4}$ fås slutligen att om $a = \dfrac{3}{5}$ så blir $b = \dfrac{4}{5}$ och om $a = -\dfrac{5}{13}$ så blir $b = -\dfrac{12}{13}$.

(rita en figur för att kolla rimligheten, kontrollera att tangeringspunkterna ligger på cirkeln samt att tangeringslinjerna och linjerna genom cirkelns medelpunkt blir vinkelräta)

Svar: $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ och $\left(-\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$.

Figur till uppgift 5



Villkor: $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$