Lösningsskiss till dugga 1 i Matematisk grundkurs

2017–10-02

1. (a) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x-y}{xy}} = \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y.$ (för $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$)

(kontrollera genom att sätta in t.ex. $x = 1$ och $y = 2$ före och efter)

Svar: $x + y$.

(b) $x^2 + 4x + y^2 - y + 2 = 0 \iff (x+2)^2 - 4 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 2 = 0 \iff$

$\iff (x+2)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \iff (x+2)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ vilket är ekvationen för en cirkel med radie $r = \dfrac{3}{2}$ och medelpunkt $(x, y) = \left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$.

(kontrollera de punkter där en av parenteserna blir 0)

Svar: radien $r = \dfrac{3}{2}$ och medelpunkten $(x, y) = \left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=4}^{25} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \cdots + \frac{3}{2^{25}}$ är en geometrisk summa med första term$= \dfrac{3}{2^4}$, kvot$= \dfrac{1}{2}$ och med antal termer$= 25 - 4 + 1 = 22$.

Således är $\displaystyle\sum_{k=4}^{25} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{22}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{22}}\right)$.

Svar: $\dfrac{3}{8}\left(1 - \dfrac{1}{2^{22}}\right)$.

2. $\dfrac{x}{2} + \sqrt{7-x} = 2 \iff \sqrt{7-x} = 2 - \dfrac{x}{2} \implies$ /kvadrera båda led, ej ekvivalens/ $\implies$

$\implies 7 - x = \left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \iff$ /lös ekvationen/ $\iff x = -2$ eller $x = 6$.

Vi har ej ekvivalens hela vägen, så vi MÅSTE kontrollera (i ursprungliga ekvationen):

- $x = -2$ ger $V.L. = \dfrac{-2}{2} + \sqrt{7+2} = -1 + \sqrt{9} = -1 + 3 = 2 = H.L.$ så $x = -2$ är en lösning.
- $x = 6$ ger $V.L. = \dfrac{6}{2} + \sqrt{7-6} = 3 + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4 \neq H.L$ så $x = 6$ är **inte** en lösning.

Svar: $x = -2$.

3. $x < \dfrac{x+5}{x-3} \iff x - \dfrac{x+5}{x-3} < 0 \iff \dfrac{x(x-3) - (x+5)}{x-3} < 0 \iff$

$\iff \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x-3} < 0 \iff \dfrac{(x-2)^2 - 9}{x-3} < 0 \iff \dfrac{(x-2-3)(x-2+3)}{x-3} < 0 \iff$

$\iff \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-3} < 0$. Teckentabellen

x		-1		3		5	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-5)(x+1)}{x-3}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $x < -1$ eller $3 < x < 5$.

(kontrollera rimligheten genom att t ex sätta in $x = -2,\ x = 0,\ x = 4$ och $x = 6$)

Svar: $x < -1$ eller $3 < x < 5$.

4. (a) $$\left|\frac{(1-2i)(3+i)^2}{i(2-i)}\right| = \frac{|1-2i|\cdot|3+i|^2}{|i|\cdot|2-i|} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{10})^2}{1\cdot\sqrt{5}} = 10$$

Svar: 10.

(b) $z^2 - 4iz - 9 = 12i \iff (z-2i)^2 = 5 + 12i$. Ansätt $z - 2i = a + bi$, där a och b är reella, så fås $(a+bi)^2 = 5+12i \iff a^2-b^2+2abi = 5+12i$. Identifiering av realdel, imaginärdel och belopp ger ekvationerna $$\begin{cases} Re: & a^2 - b^2 = 5 \\ Im: & 2ab = 12 \\ Abs: & a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13. \end{cases}$$

$Re + Abs$ ger därefter att $2a^2 = 18 \iff a = \pm 3$, och ur Im fås att om $a = 3$ så är $b = 2$, om $a = -3$ så är $b = -2$. Således är $z - 2i = 3 + 2i$, dvs $z = 3 + 4i$, eller $z - 2i = -3 - 2i$, dvs $z = -3$.

(kontroll görs enklast via sambandet mellan rötter och koefficienter)

Svar: $z = 3 + 4i$ eller $z = -3$.

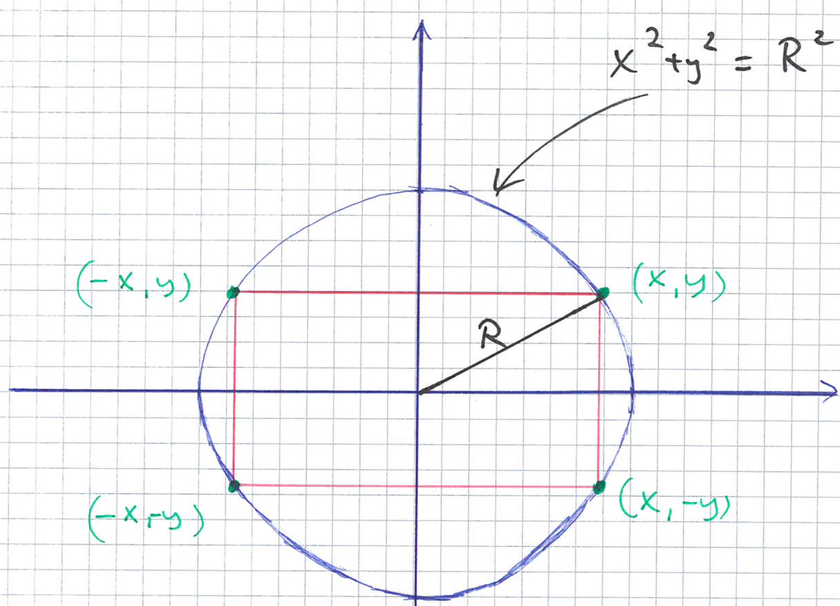
5. OBS: RITA FIGUR (se nästa sida)

Införs ett lämpligt koordinatsystem får cirkeln ekvationen $x^2 + y^2 = R^2$ och hörnen för en rektangel inskriven i cirkeln har koordinaterna $\left(\pm x, \pm\sqrt{R^2 - x^2}\right)$, där alla teckenkombinationer möjliga. Låt $\left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)$ vara det hörn som ligger i första kvadranten, så att $0 < x < R$. Rektangelns area är då

$$A = 2x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\sqrt{x^2\left(R^2 - x^2\right)} = 4\sqrt{-\left(x^4 - R^2x^2\right)} =$$

$$= 4\sqrt{-\left(\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2 - \frac{R^4}{4}\right)} = 4\sqrt{\frac{R^4}{4} - \left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2}.$$ Det sista uttrycket visar att den största möjliga arean är $4\sqrt{\dfrac{R^4}{4}} = 2R^2$, då $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ (som uppfyller villkoret $0 < x < R$).

Svar: Maximal area är $A = 2R^2$.



Låt (x,y) vara hörnet i första kvadranten:

Sambandet $x^2+y^2=R^2$ ger

$y = (\pm)\sqrt{R^2-x^2}$.

Arean $=$ bas $\cdot$ höjd $= 2x \cdot 2y = 4xy =$

$= 4x \cdot \sqrt{R^2-x^2}$, $\quad 0 < x < R$.