Lösningsskiss till dugga 1 i Matematisk grundkurs

2018-09-14

1. (a) $\dfrac{4-3i}{2-i} = \dfrac{(4-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{11-2i}{5} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}i.$

Svar: $\dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}i.$

(b) $p(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 \geq 3$, eftersom $(x-2)^2 \geq 0$, och $p(2) = 3$ dvs polynomets minsta värdet är 3 (då $x = 2$).

Svar: Minsta värdet är 3.

(c) $\sum_{k=3}^{27} 2 \cdot 3^k$ är en geometrisk summa med första term$= 2 \cdot 3^3$, kvot$= 3$ och med antal termer$= 27 - 3 + 1 = 25$. Således är $\sum_{k=3}^{27} 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3^3 \cdot \dfrac{3^{25}-1}{3-1} = 27\left(3^{25}-1\right)$.

Svar: $27\left(3^{25}-1\right)$.

(d) $\dbinom{17}{15} - \dbinom{16}{14} = \dbinom{17}{17-15} - \dbinom{16}{16-14} = \dbinom{17}{2} - \dbinom{16}{2} = \dfrac{17 \cdot 16}{1 \cdot 2} - \dfrac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} =$

$= \dfrac{(17-15) \cdot 16}{2} = 16$

Svar: 16.

2. $x + \sqrt{2x+5} = 5 \iff \sqrt{2x+5} = 5 - x \implies (2x+5) = (5-x)^2 \iff$
$\iff x^2 - 12x + 20 = 0 \iff x = 6 \pm \sqrt{36-20} = 6 \pm 4$, dvs $x = 2$ eller $x = 10$.
Vi har inte säkert ekvivalens vid kvadreringen, så vi **MÅSTE** kontrollera svaren(i den ursprungliga ekvationen).

- $x = 2$ ger $V.L. = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 = H.L.$, dvs $x = 2$ är en lösning.
- $x = 10$ ger $V.L. = 10 + \sqrt{25} = 10 + 5 = 15 \neq 5 = H.L.$, dvs $x = 10$ är **inte** en lösning.

Svar: $x = 2$.

3. Vi gör falluppdelning:
$|x| = \begin{cases} x & , \text{ då } x \geq 0 \\ -x & , \text{ då } x \leq 0 \end{cases}$ och $|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \text{ då } x \geq 1 \\ -(x-1) & , \text{ då } x \leq 1. \end{cases}$ Vi får alltså tre fall

- Om $x \leq 0$ så fås
  $2|x| = 3 + |x-1| \iff -2x = 3 - (x-1) \iff x = -4$, som ligger i intervallet.
- Om $0 \leq x \leq 1$ så fås
  $2|x| = 3 + |x-1| \iff 2x = 3 - (x-1) \iff x = 4/3$ som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.
- Om $x \geq 1$ så fås
  $2|x| = 3 + |x-1| \iff 2x = 3 + x - 1 \iff x = 2$ som ligger i intervallet.

Svar: $x = -4$ eller $x = 2$.

4. $\dfrac{x}{x+2} < \dfrac{x+2}{x} \iff \dfrac{x+2}{x} - \dfrac{x}{x+2} > 0 \iff \dfrac{(x+2)^2 - x^2}{x(x+2)} > 0 \iff$
$\iff \dfrac{4x+4}{x(x+2)} > 0 \iff \dfrac{x+1}{x(x+2)} > 0$. Teckentabellen

x		-2		-1		0	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x(x+2)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $-2 < x < -1$ eller $x > 0$.

Svar: $-2 < x < -1$ eller $x > 0$.

5. Ansätt $z = a + bi$, där a och b är reella, så fås
$(a+bi)^2 = 5 - 12i \iff a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$. Identifiering av realdel, imaginärdel och belopp ger ekvationerna
$$\begin{cases} Re: & a^2 - b^2 = 5 \\ Im: & 2ab = -12 \\ Abs: & a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13. \end{cases}$$
$Re + Abs$ ger därefter att $2a^2 = 18 \iff a = \pm 3$, och ur Im fås att om $a = 3$ så är $b = -2$, om $a = -3$ så är $b = 2$. Således är $z = 3 - 2i$ eller $z = -3 + 2i$.

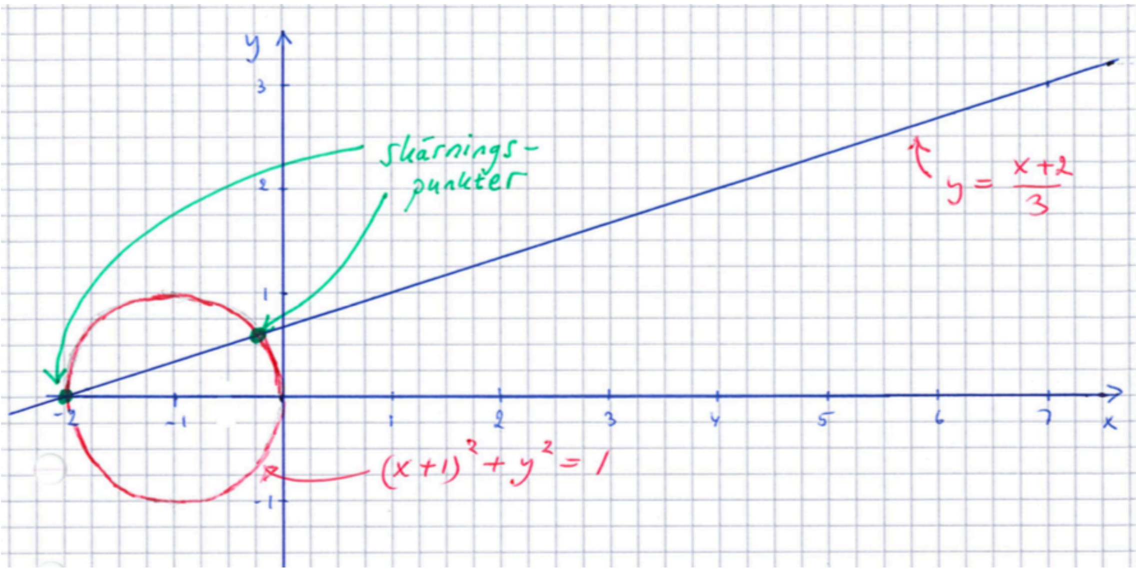
Svar: $z = 3 - 2i$ eller $z = -3 + 2i$.

6. Linjen genom $(-2, 0)$ och $(7, 3)$ har lutningen $k = \dfrac{3-0}{7-(-2)} = \dfrac{1}{3}$, så linjens ekvation är $y - 0 = \dfrac{1}{3}(x - (-2))$, dvs $y = \dfrac{1}{3}(x+2)$. Cirkeln $x^2 + 2x + y^2 = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = 1$, dvs detta är en cirkel kring $(-1, 0)$ med radie $\sqrt{1} = 1$. Rita figur (se nästa sida).

Låt (a, b) vara en punkt där linjen skär cirkeln. Då får vi sambanden $\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 1 \\ b = \dfrac{a+2}{3} \end{cases}$

Således är $a = 3b - 2$, vilket insatt i den första ekvationen ger $(3b-1)^2 + b^2 = 1 \iff 10b^2 - 6b = 0 \iff b(10b - 6) = 0$, dvs $b = 0$ eller $b = \dfrac{3}{5}$. Ur sambandet $a = 3b - 2$ fås slutligen att om $b = 0$ så blir $a = -2$ och om $b = \dfrac{3}{5}$ så blir $a = -\dfrac{1}{5}$.

Svar: $(-2, 0)$ och $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.



7. Polynomet har minst ett imaginärt nollställe, dvs det finns minst ett $z = bi$, där b är reellt, sådant att $p(bi) = 0$. Direkt insättning i polynomet ger

$$p(bi) = 0 \iff (bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 8(bi) - 4 = 0 \iff (b^4 - 3b^2 - 4) + (8b - 2b^3)i = 0$$

och identifierar vi real- och imaginärdelar så får vi $\begin{cases} Re: & b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \\ Im: & 8b - 2b^3. \end{cases}$

Imaginärdelsekvationen är enklast, den ger $b = 0$ eller $b = \pm 2$. Insättning i realdelsekvationen visar att $b = \pm 2$ stämmer, men inte $b = 0$. Alltså har vi hittat två nollställen till $p(z)$, nämligen $z = \pm 2i$. Således är $p(z)$ delbar med $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$ och polynomdivision visar att $p(z) = (z^2 + 4)(z^2 + 2z - 1) = (z^2 + 4)\left((z + 1)^2 - 2)\right) =$
$= (z^2 + 4)(z + 1 + \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})$, vilket är den reella faktoriseringen.

Svar: $p(z) = (z^2 + 4)(z + 1 + \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})$.

Slutligen: Det är SYNNERLIGEN LÄMPLIGT att utföra kontroller av räkningarna. Sådana kontroller behöver normalt inte redovisas. De enda gånger som man MÅSTE redovisa kontroller är då omskrivningarna inte är ekvivalenser, utan bara implikationer (t ex vid kvadrering i ekvationslösning).