Lösningsskiss till dugga 1 i Matematisk grundkurs

2018-10-05

1. (a) $\dfrac{x+1}{x-\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} =$
$= \dfrac{x-1}{x-1} = 1$ (då $x \neq 0,\ x \neq \pm 1$).

Svar: 1.

(b) $x^2+4x+y^2-2y=0 \iff (x+2)^2+(y-1)^2=5$ vilket är ekvationen för en cirkel kring $(-2,1)$ med radie $\sqrt{5}$.

Svar: Medelpunkt $(-2,1)$ och radie $\sqrt{5}$.

(c) $\left|\dfrac{4+3i}{(3-i)^2}\right| = \dfrac{|4+3i|}{|3-i|^2} = \dfrac{\sqrt{4^2+3^2}}{(\sqrt{3^2+(-1)^2})^2} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

Svar: 1/2.

(d) $\displaystyle\sum_{k=7}^{29}(3k-4)$ är en aritmetisk summa med första term$=17$, sista term$=83$ och med antal termer$=29-7+1=23$. Således är $\displaystyle\sum_{k=7}^{29}(3k-4) = 23\cdot\frac{17+83}{2} = 1150$.

Svar: 1150.

2. Prövning visar att $x=1$ är ett nollställe till $p(x)$, alltså innehåller $p(x)$ faktorn $(x-1)$. Polynomdivision ger därefter att $p(x)=(x-1)(4x^2+4x-3)=4(x-1)\left(x^2+x-\dfrac{3}{4}\right)=$
$=4(x-1)\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-1\right)=4(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}-1\right)\left(x+\dfrac{1}{2}+1\right)=$
$=4(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$, vilket även kan skrivas $(x-1)(2x-1)(2x+3)$.

Svar: $p(x)=4(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-1)(2x+3)$.

3. $\dfrac{x+1}{x-2} \geq \dfrac{x-3}{x} \iff \dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x} \geq 0 \iff \dfrac{x(x+1)-(x-3)(x-2)}{x(x-2)} \geq 0 \iff$
$\iff \dfrac{6x-6}{x(x-2)} \geq 0 \iff \dfrac{x-1}{x(x-2)} \geq 0$. Teckentabellen

x		0		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{x(x-2)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $0 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

Svar: $0 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

4. Vi gör falluppdelning:
$|x| = \begin{cases} x & , \text{ då } x \geq 0 \\ -x & , \text{ då } x \leq 0 \end{cases}$ och $|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \text{ då } x \geq -2 \\ -(x+2) & , \text{ då } x \leq -2. \end{cases}$ Vi får alltså tre fall

- Om $x \leq -2$ så fås
  $3|x| = 5 - 2|x+2| \iff -3x = 5 + 2(x+2) \iff x = -9/5$ som inte ligger i intervallet, dvs i detta intervall finns inga lösningar.
- Om $-2 \leq x \leq 0$ så fås
  $3|x| = 5 - 2|x+2| \iff -3x = 5 - 2(x+2) \iff x = -1$ som ligger i intervallet.
- Om $x \geq 0$ så fås
  $3|x| = 5 - 2|x+2| \iff 3x = 5 - 2(x+2) \iff x = 1/5$ som ligger i intervallet.

Svar: $x = -1$ eller $x = 1/5$.

5. $\sqrt{2-2x} - 3 = x \iff \sqrt{2-2x} = x + 3 \implies 2 - 2x = (x+3)^2 \iff$
$\iff x^2 + 8x + 7 = 0 \iff x = -4 \pm \sqrt{16-7} = -4 \pm 3$, dvs $x = -7$ eller $x = -1$.
Vi har inte säkert ekvivalens vid kvadreringen, så vi **MÅSTE** kontrollera svaren (i den ursprungliga ekvationen).

- $x = -7$ ger $V.L. = \sqrt{16} - 3 = 4 - 3 = 1 \neq -7 = H.L.$, dvs $x = -7$ är **inte** en lösning.
- $x = -1$ ger $V.L. = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1 = H.L.$, dvs $x = -1$ är en lösning.

Svar: $x = -1$.

6. $z^2 + 5i = (1+i)z \iff z^2 - (1+i)z + 5i = 0 \iff$
$\iff \left(z - \dfrac{1+i}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2 + 5i = 0 \iff \left(z - \dfrac{1+i}{2}\right)^2 = -\dfrac{9i}{2}$.
Ansätt $z + \dfrac{1+i}{2} = a + bi$, där a och b är reella, så fås
$(a+bi)^2 = -\dfrac{9i}{2} \iff a^2 - b^2 + 2abi = -\dfrac{9i}{2}$. Identifiering av realdel och imaginärdel (beloppsekvationen behövs inte) ger ekvationerna $\begin{cases} (Re): & a^2 - b^2 = 0 \\ (Im): & 2ab = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$
(Re) ger att $a = \pm b$, och ur (Im) ser vi att a och b har olika tecken, dvs $a = -b$. Detta insatt i (Im) ger $-2b^2 = -\dfrac{9}{2} \iff b^2 = \dfrac{9}{4} \iff b = \pm\dfrac{3}{2}$.
$b = \dfrac{3}{2}$ ger $a = -\dfrac{3}{2}$ och $b = -\dfrac{3}{2}$ ger $a = \dfrac{3}{2}$, så $z - \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$ eller $z - \dfrac{1+i}{2} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$,
dvs $z = -1 + 2i$ eller $z = 2 - i$.

Svar: $z = -1 + 2i$ eller $z = 2 - i$.

7. Med $t=\sqrt{x+3}$ fås att $\sqrt{x-4\sqrt{x+3}+7}+\sqrt{x-8\sqrt{x+3}+19}=$
$=\sqrt{t^2-3-4t+7}+\sqrt{t^2-3-8t+19}=\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-8t+16}=$
$=\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-4)^2}=|t-2|+|t-4|=|\sqrt{x+3}-2|+|\sqrt{x+3}-4|.$

   $x=2$ ger värdet $|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-4|=\Big/ 2<\sqrt{5}<4 \Big/ =(\sqrt{5}-2)+(4-\sqrt{5})=-2.$

   $x=11$ ger värdet$|\sqrt{14}-2|+|\sqrt{14}-4|=\Big/ 2<\sqrt{14}<4 \Big/ =(\sqrt{14}-2)+(4-\sqrt{14})=-2.$

   (För övrigt fås samma värde för alla x sådana att $1\le x\le 13$.)

   Svar: Av ovan framgår att värdena är lika för $x=2$ och för $x=11$ (värdet är -2).

Slutligen: Det är SYNNERLIGEN LÄMPLIGT att utföra kontroller av räkningarna. Sådana kontroller behöver normalt inte redovisas. De enda gånger som man MÅSTE redovisa kontroller är då omskrivningarna inte är ekvivalenser, utan bara implikationer (t ex vid kvadrering i ekvationslösning).