

## Dugga 2 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN2 2015-11-14, kl. 08-12

Inga hjälpmedel.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar på så enkel form som möjligt. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Lösningar läggs ut på kurswebbsidan efter skrivtidens slut.

1. (a) Skriv  $3 - i\sqrt{3}$  på polär form. (1 p)  
(b) För vilka  $x$  gäller olikheten  $\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{2x-1}{x+2}$ ? (2 p)
2. (a) Bestäm ekvationen för den cirkel som har medelpunkt  $(-3, 2)$  och som går genom punkten  $(2, -1)$ . (1 p)  
(b) Lös ekvationen  $(2-y)^{-1} = 2^{-1} + y^{-1}$ . (1 p)  
(c) Bestäm, med hjälp av kvadratkomplettering, det största värdet av  $\frac{e^{8x}}{e^4 e^{x^2}}$ . (1 p)
3. (a) Finn alla reella lösningar till ekvationen  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ . (1 p)  
(b) Beräkna  $\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$ . (1 p)  
(c) Beräkna  $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$ . (1 p)
4. (a) Förenkla uttrycket  $\frac{e^{2\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3^2} + (e^{-\ln 3})^2}$  så långt som möjligt. (1 p)  
(b) Lös ekvationen  $2 \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - \ln(1-x) = \ln 2$ . (2 p)
5. Bestäm samtliga komplexa tal  $z$  som löser ekvationen  $z^5 = i - 1$ .
6. Betrakta funktionen  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$ . Bestäm, om möjligt, inversen  $f^{-1}$  samt definitions- och värdemängd för  $f$  och  $f^{-1}$ .
7. Visa att om  $a$  och  $z$  är komplexa tal och om  $|a| < 1$  så är

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$$