Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Martin Bengtsson

# Lösningar till dugga 2
# Matematisk grundkurs TATA68
# 2015-11-14, kl. 8-12

---

1. (a) $3-i\sqrt{3} = \Big/ |3-i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Big/ = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

   En vinkel $v$ som uppfyller $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\sin v = -\frac{1}{2}$ är $v = -\frac{\pi}{6}$

   $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

   **Svar:** $2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{12}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

   (b) $\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

   $\frac{2x^2-x-10-(2x^2-5x+2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-12}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

   $\frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

   Teckentabell med $f(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | - | 0 | + | | + | | + |
| $x-2$ | - | | - | 0 | + | | + |
| $x-3$ | - | | - | | - | 0 | + |
| $f(x)$ | - | $\nexists$ | + | $\nexists$ | - | 0 | + |

   $f(x) \geq 0$ då $-2 < x < 2$ eller $x \geq 3$

   **Svar:** $-2 < x < 2$ eller $x \geq 3$

2. (a) Cirkelns ekvation är allmänt $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ där $(a,b)$ är medelpunkten och $r$ är radien.

   Medelpunkten är känd till $(-3,2)$ och radien hos uppgiftens cirkel fås av avståndet mellan cirkelns medelpunkt och en punkt på cirkeln; $r = \sqrt{(2-(-3))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{34}$.

   Den sökta cirkelns ekvation är därmed: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 34$

   **Svar:** $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 34$

   (b) För $y \neq 2$ och $y \neq 0$ gäller med ekvivalens hela vägen

   $(2-y)^{-1} = 2^{-1} + y^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2-y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow$

   $\frac{2y}{2y(2-y)} - \frac{y(2-y)}{2y(2-y)} - \frac{2(2-y)}{2y(2-y)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2y-2y+y^2-4+2y}{2y(2-y)} = 0 \Leftrightarrow$

$y^2+2y-4=0 \;\Leftrightarrow\; (y+1)^2-5=0 \;\Leftrightarrow\; y=-1\pm\sqrt{5}$

<u>**Svar:**</u> $y=-1\pm\sqrt{5}$

(c) $\dfrac{e^{8x}}{e^4e^{x^2}} = e^{8x-4-x^2} = e^{-(x^2-8x+4)} = e^{-((x-4)^2-12)} = e^{-(x-4)^2+12}$

Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande så fås det största värdet då $-(x-4)^2+12$ är så stort som möjligt, dvs då $x=4$.
Det sökta största värdet är $e^{-(4-4)^2+12} = e^{12}$

<u>**Svar:**</u> $e^{12}$

3. (a) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) \;\Leftrightarrow\; 3x-\dfrac{\pi}{5} = \pm\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+2\pi n \;\Leftrightarrow$

$4x = \dfrac{8\pi}{15}+2\pi n$ eller $2x = \dfrac{-2\pi}{15}+2\pi n \;\Leftrightarrow$

$x = \dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{\pi n}{2}$ eller $x = -\dfrac{\pi}{15}+\pi n$

<u>**Svar:**</u> $x = \dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{\pi n}{2}$ eller $x = -\dfrac{\pi}{15}+\pi n$ där $n$ är ett heltal.

(b) Eftersom $0<\dfrac{2}{3}<1$ så är $0<\arcsin\dfrac{2}{3}<\dfrac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arcsin\dfrac{2}{3}$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katets längd $=2$, hypotenusans längd $=3$ och närliggande katets längd $=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ (visa genom att rita den rätvinkliga triangeln!). Alltså är $\tan\left(\arcsin\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

<u>**Svar:**</u> $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(c) $\arccos\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{6\pi}{5}+2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{4\pi}{5}$
vilket uppfyller att $V_{\text{arccos}} = [0,\pi]$.

<u>**Svar:**</u> $\dfrac{4\pi}{5}$

4. (a) $\dfrac{e^{2\ln 3}-e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3^2}+(e^{-\ln 3})^2} = \dfrac{e^{\ln 3^2}-e^{\ln 3^{-1}}}{e^{\ln 3^2}+\left(e^{\ln 3^{-1}}\right)^2} = \dfrac{9-\frac{1}{3}}{9+\frac{1}{9}} = \dfrac{81-3}{81+1} = \dfrac{78}{82} = \dfrac{39}{41}$

<u>**Svar:**</u> $\dfrac{39}{41}$

(b) Logaritmerna är definierade förutsatt att: $x+\dfrac{1}{2}>0$ och $1-x>0$, dvs då $-\dfrac{1}{2}<x<1$. För dessa värden på $x$ gäller:

$2\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\ln(1-x)=\ln 2 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \ln(2-2x) \;\Leftrightarrow$

/ ln är strängt växande / $\;\Leftrightarrow\; x^2+x+\dfrac{1}{4} = 2-2x \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-\dfrac{7}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3/2)^2-4=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\dfrac{3}{2}\pm 2 \;\Leftrightarrow\; x=-\dfrac{7}{2}$ eller $x=\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{7}{2}\le-\dfrac{1}{2}$ är ej en lösning. $x=\dfrac{1}{2}$ är en lösning (ty $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}<1$).

<u>**Svar:**</u> $x=\dfrac{1}{2}$

5. Vi löser $z^5 = i - 1$ genom att först skriva om både VL och HL till polär form. Ansätt först $z = re^{iv},\ r \geq 0$:
$VL = z^5 = r^5 e^{5iv}$
$HL = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Likhet mellan VL och HL uppstår endast då beloppen är lika och argumenten är lika:
$r^5 = \sqrt{2} \Leftrightarrow r = 2^{1/10}$ och
$5v = 3\pi/4 + 2\pi n \Leftrightarrow v = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2\pi n}{5}$ där $n \in \mathbf{Z}$

Den ursprungliga ekvationen är en femtegradsekvation och ska ha fem lösningar, $n$ väljs därmed till t.ex. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$z = re^{iv} = 2^{1/10} e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}\right)},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

**Svar:** De fem olika lösningarna är $z = 2^{1/10} e^{i\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}\right)},\ n = 0, 1, 2, 3, 4$

6. Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för $f(x)$:
$\dfrac{x+1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 2$ vilket t.ex. kan ses i en teckentabell.

| $x$ | | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | - | 0 | + | | + |
| $2-x$ | + | | + | 0 | - |
| $\dfrac{x+1}{2-x}$ | - | 0 | + | $\nexists$ | - |

$D_f = [-1, 2[$

$y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{x+1}{2-x},\ y \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - xy^2 = x + 1,\ y \geq\ 0 \Leftrightarrow$
$x(1 + y^2) = 2y^2 - 1,\ y \geq\ 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y^2 - 1}{y^2 + 1},\ y \geq 0$

Varje tillåtet $y$-värde ger endast ett $x-$ värde och inversen existerar därmed.

$f^{-1}(y) = \dfrac{2y^2 - 1}{y^2 + 1},\ y \geq 0.$

Värdemängden för inversen $V_{f^{-1}} = D_f = [-1, 2[$ och värdemängden för $f$ fås av definitionsmängden för $f^{-1}$, $V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$

**Svar:** $V_{f^{-1}} = D_f = [-1, 2[\ ,\quad V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$

och inversen är $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1},\ x \geq 0$

7. $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z - a| < |1 - \bar{a}z| \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2 \Leftrightarrow$

$(z-a)(\overline{z-a}) < (1 - \bar{a}z)(\overline{1 - \bar{a}z}) \Leftrightarrow (z-a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a} < 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z} \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow$

$|z|^2\left(1 - |a|^2\right) < 1 - |a|^2 \Leftrightarrow\ /\ |a| < 1 \Leftrightarrow |a|^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - |a|^2 > 0\ /\ \Leftrightarrow$

$|z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$

För $|a| < 1$ gäller alltså ekvivalensen $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ VSV.