Lösningsförslag TATA68 2016-10-22

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$x \cdot \frac{x+2}{2-3x} > 8x+3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x-(8x+3)(2-3x)}{2-3x} = \frac{25x^2-5x-6}{2-3x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3/5)(x+2/5)}{2-3x} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$-2/5$		$3/5$		$2/3$	
$x+2/5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3/5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-3x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{(x-3/5)(x+2/5)}{2-3x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	☠	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -2/5$ eller $3/5 < x < 2/3$.

(b) Direkt från binomialsatsen erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 3^{42-k} 2^k = (3+2)^{42} = 5^{42}.$$

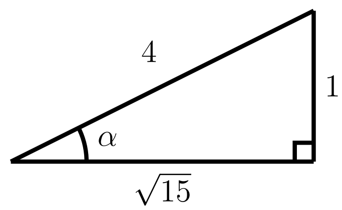
Svar: (a) $x < -2/5$ eller $3/5 < x < 2/3$ (b) 5^{42}.

2. (a) Tangens är periodisk med perioden π och $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, så

$$\sqrt{3}\tan x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

(b) Vi ser att $\alpha = \arcsin \frac{1}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

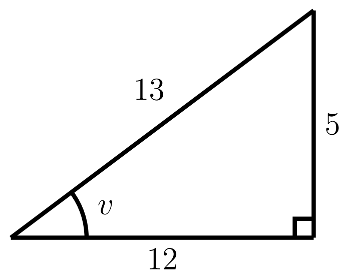
Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.



För att beräkna $\sin\beta$, låt $v = \arctan \frac{5}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

En rätvinklig hjälptriangel där $\tan v = \frac{5}{12}$ visar att $\sin v = \frac{5}{13}$ samt $\cos v = \frac{12}{13}$. Vi utnyttjar sinus för dubbla vinkeln och erhåller att

$$\sin 2v = 2\sin v\cos v = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$



Svar: (a) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, (b) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$, (c) $\sin\beta = \frac{120}{169}$.

3. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x \neq 0$ samt $x > -5$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned}\ln 4x^2 = 2\ln(x+5) + \ln x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln 4 + \ln x^2 = \ln(x+5)^2 + \ln x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 = (x+5)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -5 \pm 2,\end{aligned}$$

där $x = -7$ inte uppfyller villkoret men $x = -3$ gör det.

(b) Vi ser att uttrycket är en andragradare i 7^x och faktoriserar därför:

$$\begin{aligned}49^x - 7^{x+1} + 12 &= (7^x)^2 - 7\cdot 7^x + 12 \\ &= \left(7^x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ &= \left(7^x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(7^x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (7^x - 4)(7^x - 3).\end{aligned}$$

Således ges lösningarna till ekvationen av

$$7^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 4}{\ln 7} \qquad \text{och} \qquad 7^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 7}.$$

(c) Eftersom

$$\ln(2^x \cdot 3^x) = \ln 2^x + \ln 3^x = x\ln 2 + x\ln 3 = x(\ln 2 + \ln 3) = x\ln 6 = \ln 6^x$$

och ln är injektiv så följer det att $2^x \cdot 3^x = 6^x$.

Svar: (a) $x = -3$ (b) $x = \dfrac{\ln 4}{\ln 7}$ eller $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 7}$ (c) se ovan.

4. Enligt känd formel för $\cos^2 t$ och Eulers formler kan vi skriva

$$\begin{aligned}\sin 3x \cos^2 4x = \sin 3x \left(\frac{1+\cos 8x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \cos 8x \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right)\left(e^{i8x} + e^{-i8x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{8i}\left(e^{i11x} - e^{-i11x} - \left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}(\sin 11x - \sin 5x).\end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför skrivas

$$4\sin 3x\cos^2 4x = 3\sin 3x - \sin 5x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 11x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 11x = 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \\ \qquad \text{eller} \\ 11x = \pi - 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7},\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Svar: $\sin 3x \cos^2 4x = \dfrac{1}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{4}(\sin 11x - \sin 5x)$; $x = \dfrac{\pi n}{4}$ eller $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) Det komplexa talet $\sqrt{3}+i$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3}+i = \sqrt{3+1}\,e^{i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{15} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\pi/4-i\pi/6}\right)^{15} = 2^{-15/2}e^{-i75\pi/12} = 2^{-15/2}e^{-i6\pi-i\pi/4} \\ &= 2^{-15/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{-8}\,(1-i) = \frac{1-i}{256}.\end{aligned}$$

(b) En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Låt $z = re^{i\theta}$ för $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$z^3 = r^3e^{i3\theta} = 1+2i. \tag{1}$$

Det komplexa talet $1+2i$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$1+2i = \sqrt{5}\,e^{i\arctan 2}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^3 = 5^{1/2} \quad \text{och} \quad 3\theta = \arctan 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r \geq 0$ måste $r = 5^{1/6}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\arctan 2}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Lösningarna till (1) ges alltså av

$$z = 5^{1/6}e^{i(\arctan 2 + 2\pi n)/3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 3 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2$.

Svar: (a) $\dfrac{1-i}{256}$ (b) $z = 5^{1/6}e^{i(\arctan 2+2\pi n)/3}, \quad n = 0, 1, 2.$

6. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att både $\sqrt{x+1}$ och $\sqrt{1-x}$ ska vara definierade. Antag att detta är sant. Vidare måste även

$$2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x} > \sqrt{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad 1-x > 1+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Här har vi utnyttjat att $-1 \leq x \leq 1$, $\sqrt{a} \geq 0$ för alla $a \geq 0$, samt att funktionen $x \mapsto x^2$ är strängt växande för icke-negativa x. Alltså blir $D_f = [-1, 0[$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

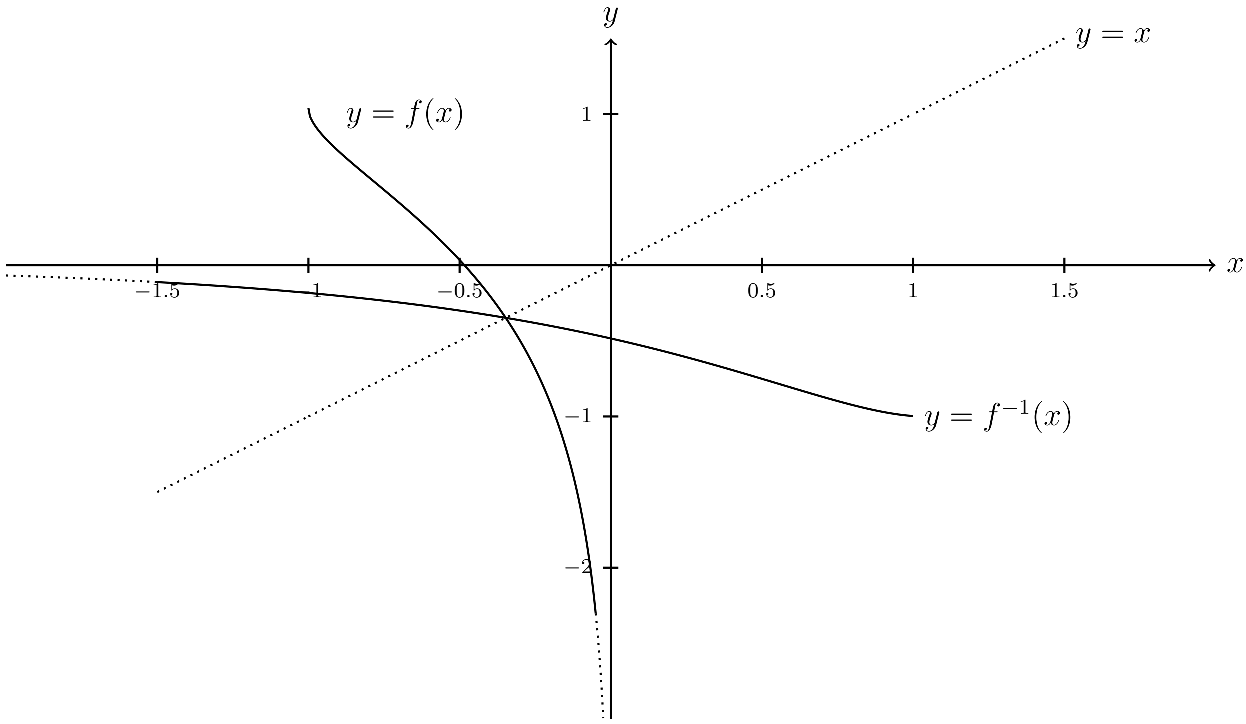
$$\begin{aligned} y = \ln\left(2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^y}{2} = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \\ &\Rightarrow \quad \frac{e^{2y}}{4} = 1-x+1+x-2\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

där vi kvadrerat ekvationen i sista steget. Vi sorterar om och kvadrerar igen:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{e^{2y}}{8} \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = 1 - \frac{e^{2y}}{4} + \frac{e^{4y}}{64}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{e^{2y}}{4} - \frac{e^{4y}}{64}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{e^y}{8}\sqrt{16 - e^{2y}}.$$

Vi har alltså två alternativ till ett eventuellt uttryck för en invers. Nu vet vi i förväg att $x < 0$ (för att $x \in D_f$), så vi ser direkt att den positiva lösningen inte kan vara aktuell. Således finner vi högst en lösning för varje y så detta måste vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = [-1, 0[$ och $f^{-1}(y) = -\frac{e^y}{8}\sqrt{16 - e^{2y}}$.



7. Först ser vi till att allt är definierat för alla $n = 1, 2, \ldots$ Vi ser att

$$\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n} > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2n} = -\frac{\pi}{4}$$

för alla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ och då $\frac{\pi}{4} < 1$ så är $\arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right)$ definierat för $k = 0, 1, \ldots, n$ eftersom $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$. Låt nu

$$c_k = \binom{n}{k} \arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right), \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vi vill beräkna summan $S = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Vi ser att

$$c_{n-k} = \binom{n}{n-k} \arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(n-k)}{2n}\right) = \binom{n}{k} \arcsin\left(-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right)\right) = -c_k,$$

där vi utnyttjat att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ och att $\arcsin(-t) = -\arcsin t$ för alla t i intervallet $[-1, 1]$. Termerna i summan uppvisar alltså en symmetri $c_{n-k} + c_k = 0$, så

$$\left.\begin{aligned} S &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\ S &= c_n + c_{n-1} + \cdots + c_0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2S &= (c_0 + c_n) + (c_1 + c_{n-1}) + \cdots + (c_n + c_0) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \end{aligned}$$

vilket innebär att $S = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Svar: Summan blir 0 för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.