Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Marcus Kardell

Lösningar till dugga 2
Matematisk grundkurs TATA68
2016-11-11, kl. 8-12

---

1. (a) Vi kvadrerar (med implikation) och får
$\sqrt{4x^2 - 32x + 36} = 2\sqrt{3 - 3x} \implies$
$4x^2 - 32x + 36 = 4(3 - 3x) \;\Leftrightarrow$
$x^2 - 8x + 9 = 3 - 3x \;\Leftrightarrow$
$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow$
$(x - 2)(x - 3) = 0.$
Prövning i ursprungsekvationen ger att uttrycken är odefinierade för både $x = 2$ och $x = 3$. Båda lösningarna är alltså falska rötter, som uppstått vid kvadreringen.

Svar: Ekvationen saknar lösningar.

(b) Summan är geometrisk med 9 stycken termer och kvoten 2. Första termen är 3/4 och sista termen är $3 \cdot 2^6 = 192$, vilket ger att

$$\sum_{k=-2}^{6} 3 \cdot 2^k = \frac{2 \cdot 192 - 3/4}{2 - 1} = 384 - 3/4 = \frac{1536 - 3}{4} = \frac{1533}{4}.$$

Svar: Summans värde är $\dfrac{1533}{4}$.

(c) Sätt $p(x) = 0$ och kvadratkomplettera, så blir

$$x^2 + 2ax + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + a)^2 - a^2 + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + a = \pm\sqrt{a^2 - 9}$$

vilket ger två reella lösningar om $a^2 > 9$, dvs om $a > 3$ eller $a < -3$.

Svar: Polynomet har två reella nollställen för $a > 3$ eller $a < -3$.

2. (a) Beloppet ges direkt av $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$.
Eftersom argumentet för $-1 - 4i$ inte är någon standardvinkel, så behöver vi uttrycka den med någon arcusfunktion. Dock finns det ingen av dessa som direkt ger en vinkel i tredje kvadranten. Vi använder därför till exempel att $\arg(-1 - 4i) = \pi + \arg(1 + 4i) = \pi + \arctan 4$.

Svar: $z = \sqrt{17} \cdot e^{i(\pi + \arctan 4)}$.

(b) Med $z = re^{iv}$ och HL $= \frac{1}{8}e^{i\pi}$ på polär form får vi

$$z^3 = -\frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; r^3 e^{3iv} = \frac{1}{8}e^{i\pi}$$

vilket ger

$$\begin{cases} r^3 = 1/8 \\ 3v = \pi + 2\pi n \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} r = 1/2 \\ v = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}e^{i\pi/3} \\ z_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi} \\ z_3 = \frac{1}{2}e^{5i\pi/3} \end{cases}.$$

Via $e^{iv} = \cos v + i \sin v$ går vi tillbaka till $a + bi$-form och får
$z_1 = 1/4 + i\sqrt{3}/4$, $z_2 = -1/2$ samt $z_3 = 1/4 - i\sqrt{3}/4$.

Svar: $z = 1/4 \pm i\sqrt{3}/4$ eller z = -1/2.

3. (a) Uttrycken i ekvationen är definierade då $2x^2 - 9 > 0$ samt $x < 0$. För dessa x gäller, då ln är injektiv, att $\ln 2 + \ln(2x^2 - 9) = \ln(-x) \Leftrightarrow \ln(4x^2 - 18) = \ln(-x) \Leftrightarrow 4x^2 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x/4 - 9/2 = 0 \Leftrightarrow (x+1/8)^2 - 1/64 - 9/2 = 0 \Leftrightarrow (x+1/8)^2 = 289/64 \Leftrightarrow x + 1/8 = \pm 17/8$ vilket ger $x_1 = 2$ och $x_2 = -9/4$. Eftersom $2 > 0$ är x_1 en falsk rot, medan x_2 uppfyller båda villkoren.

   Svar: $x = -9/4$ är den enda lösningen.

   (b) Vi utgår från definitionen av tangens, och använder dubbla-vinkelformlerna för sin och cos:

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{2 \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},$$

   vilket gäller för alla α där uttrycken är definierade.

4. Med trig.ettan får vi en ekvation som bara innehåller cosinustermer, vilket ger ett lämpligt variabelbyte $t = \cos x$:
$4\cos^3 x + 8\sin^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$
$t^3 - 2t^2 - \frac{3t}{4} + \frac{3}{2} = 0$. Vi gissar roten $t = 2$, och får (med polynomdivision) faktoriseringen $(t-2)(t^2 - 3/4) = 0$. Den första faktorn saknar nollställen, då $t = \cos x \in [-1, 1]$. Från den andra faktorn får vi
$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

   Svar: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

5. (a) Två operationer begränsar (potentiellt) definitionsmängden, nämligen logaritmeringen och divisionen. Då $D_{\ln} =]0, +\infty[$ får vi kraven

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 1 + 3\ln(x+4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ \ln(x+4) \neq -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \neq e^{-1/3} - 4 \end{cases}.$$

   För dessa x stuvar vi om och löser ut det inversa sambandet från

$$y = \frac{2\ln(x+4) - 1}{1 + 3\ln(x+4)} \Leftrightarrow y(1 + 3\ln(x+4)) = 2\ln(x+4) - 1 \Leftrightarrow$$

$$(3y - 2)\ln(x+4) = -1 - y \Leftrightarrow \ln(x+4) = \frac{-1-y}{3y-2} \Leftrightarrow$$

$$x = \exp\left(\frac{-1-y}{3y-2}\right) - 4 \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1+y}{2-3y}\right) - 4.$$

   Alltså finns en invers, eftersom uttrycket ovan ger ett entydigt $x \in D_f$ för varje $y \in V_f$.

   Svar: $\begin{cases} D_f =]-4, e^{-1/3} - 4[\cup]e^{-1/3} - 4, +\infty[\\ f^{-1}(y) = \exp\left(\frac{1+y}{2-3y}\right) - 4 \end{cases}$

   (b) Eftersom $-x$ och $-x^3$ är strängt avtagande, så är även $g(x)$ det. Varje funktionsvärde antas alltså (högst) en gång, så $g(x)$ är inverterbar. Vi beräknar $g^{-1}(3)$ genom att sätta $y = 3$ i ekvationen $y = 5 - x^3 - x$, och ser att $x = 1$ är (den unika) lösningen.

   Svar: Värdet för $g^{-1}(3) = 1$.

6. (a) Det är bara att bena upp uttrycket inifrån:

   i. $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$.
   ii. $\arcsin(-1/\sqrt{2}) = -\pi/4$.
   iii. $\tan(-\pi/4) = -1$.
   iv. $\arccos(-1) = \pi$.

   Svar: $\arccos\left(\tan\left(\arcsin\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)\right)\right) = \pi$.

   (b) En omskrivning av vänsterledet med Eulers formler ger att

$$\mathrm{VL} = \sin\left(\frac{13\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \left(\frac{e^{i\frac{13\pi}{24}} - e^{-i\frac{13\pi}{24}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\frac{7\pi}{24}} - e^{-i\frac{7\pi}{24}}}{2i}\right) =$$

$$\frac{e^{i\frac{20\pi}{24}} - e^{i\frac{6\pi}{24}} - e^{i\frac{-6\pi}{24}} + e^{i\frac{-20\pi}{24}}}{-4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\frac{20\pi}{24}} + e^{-i\frac{20\pi}{24}}}{2} - \frac{e^{i\frac{6\pi}{24}} + e^{-i\frac{6\pi}{24}}}{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{20\pi}{24} - \cos\frac{6\pi}{24}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   vilket är lika med det högerled som var givet i uppgiften.

7. Skriv vänsterledet på $a + bi$-form och identifiera real- och imaginärdelar så får vi ekvationssystemet

$$e^{x(b^2+b)}(\cos x + i\sin x) = ai + 3\cos x \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} e^{x(b^2+b)} \cdot \cos x = 3\cos x, \\ e^{x(b^2+b)} \cdot \sin x = a. \end{cases}$$

   Den första ekvationen ger

$$\left(e^{x(b^2+b)} - 3\right) \cdot \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{\ln 3}{b^2+b} \text{ om } b \neq 0, -1, \text{ eller} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\; b \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

   Systemet kan alltså inte ha lösningar för andra x än de ovannämnda, och det är lätt att välja a i den andra ekvationen, så att systemet faktiskt får lösningar för dessa x!

   – För $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ måste a väljas till $\exp\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)(b^2+b)\right) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ vilket kan förenklas något till $a = (-1)^n \cdot \exp\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)(b^2+b)\right)$.

   – För $b \neq 0, -1$ och $x = \frac{\ln 3}{b^2+b}$ blir $a = \exp\left(\ln 3 \cdot \frac{b^2+b}{b^2+b}\right) \cdot \sin\frac{\ln 3}{b^2+b} = 3\sin\frac{\ln 3}{b^2+b}$.

   Svar: Ekvationen har (minst) en lösning om $a = 3\sin\frac{\ln 3}{b^2+b}$ och $b \neq 0, -1$, eller om $a = (-1)^n \cdot e^{(\frac{\pi}{2}+n\pi)(b^2+b)}$ och $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.