Lösningsförslag TATA68 2017-10-20

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = 2/3$ och 48 termer. Alltså,

$$\sum_{k=3}^{50} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=3}^{50} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^3}{3^k} = \frac{2^3}{3^4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{48}}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{48}\right).$$

(b) Från definitionen av binomialkoefficienter ser vi att

$$\begin{aligned} 36 = \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (n - 1/2)^2 = \frac{289}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{1 \pm 17}{2}, \end{aligned}$$

där endast $n = 9$ är en lösning ty $\binom{n}{n-2}$ är bara definierat för $n = 2, 3, 4, \ldots$

(c) Låt $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned} (4+i)(\overline{a+bi}) - 2i(a+bi) = 4 - 2i \quad &\Leftrightarrow \quad 4a - 4bi + ai + b - 2ai + 2b = 4 - 2i \\ &\Leftrightarrow \quad 4a + 3b - (a + 4b)i = 4 - 2i. \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a + 3b = 4 \\ a + 4b = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 10/13 \\ b = 4/13. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså ges den enda lösningen av $z = \dfrac{10 + 4i}{13}$.

Svar: (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{48}\right)$ (b) 9 (c) $z = \dfrac{10 + 4i}{13}$.

2. (a) För att alla logaritmer ska vara definierade krävs att $-3 < x < \dfrac{1}{2}$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned} \ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(2-4x) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln((x+3)(2-x)) = \ln(2-4x) \\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)(2-x) = 2 - 4x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

där $x = 4$ inte uppfyller att $x < \dfrac{1}{2}$ men $x = -1$ uppfyller $-3 < x < \dfrac{1}{2}$.

(b) Logaritmlagar och det faktum att exp och ln är varandras inverser visar att

$$\begin{aligned} \frac{e^{3\ln 3} - e^{-\ln 3}}{\ln\left(4\left(e^{-\ln 2}\right)^2\right) + \left(\ln e^{-3}\right)^3} &= \frac{e^{\ln 3^3} - e^{\ln \frac{1}{3}}}{\ln\left(4\left(e^{\ln \frac{1}{2}}\right)^2\right) + (-3)^3} = \frac{3^3 - \frac{1}{3}}{\ln(1) + (-3)^3} \\ &= \frac{3^3 - \frac{1}{3}}{(-3)^3} = -1 + \frac{1}{3^4} = -\frac{80}{81}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x = -1$ (b) $-\dfrac{80}{81}$.

3. (a) Då $-\cos t = \cos(\pi - t)$ $(= \cos(t-\pi) = \cos(t+\pi))$ följer det att

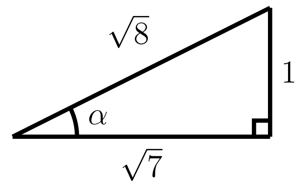
$$\begin{aligned}\cos 3x + \cos 5x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos 3x = \cos(\pi - 5x)\\ &\Leftrightarrow \quad \pm 3x = \pi - 5x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Lösningarna ges alltså av

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}, \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

(b) Vi ser att $\alpha = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{8}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$. Ifrån denna triangel kan vi se att $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.



(c) Eftersom $\cos v = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ och $\pi < v < 2\pi$, så måste (trigonometriska ettan)

$$\sin v = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Därför blir

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Svar: (a) $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. (a) Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att logaritmen ska vara definierad måste vi kräva att $7 - 3x > 0$, så $x < \dfrac{7}{3}$. Vidare får nämnaren inte bli noll, vilket skulle ske då

$$1 + \ln(7-3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(7-3x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 3x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\left(7 - e^{-1}\right).$$

Definitionsmängden D_f ges således av $x < \dfrac{7}{3}$ och $x \neq \dfrac{1}{3}\left(7 - e^{-1}\right)$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{1 + \ln(7-3x)} \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{y} = 1 + \ln(7-3x) \ \Leftrightarrow\ 7 - 3x = \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right)\\ &\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Vi finner högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\dfrac{1}{y} - 1\right)\right)$.

(b) Då $\pm 1 \in D_g = \mathbf{R}$ och $g(-1) = g(1) = 6$ kan g inte vara injektiv och därmed saknas invers.

Svar: (a) $x < \dfrac{7}{3}$, $x \neq \dfrac{1}{3}(7 - e^{-1})$; $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\dfrac{1}{y} - 1\right)\right)$ (b) invers saknas.

5. Vi använder Eulers formler för att skriva om vänsterledet enligt

$$\begin{aligned}
\sin 2x \sin 3x \sin 5x &= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{i5x}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-i5x}\right)\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{i10x}-1-e^{i4x}+e^{-i6x}-e^{i6x}+e^{-i4x}+1-e^{-i10x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 4x+\sin 6x-\sin 10x\right).
\end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan då skrivas som

$$\sin 4x+\sin 6x-\sin 10x=\sin 4x \;\Leftrightarrow\; \sin 10x=\sin 6x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 6x+2\pi n \\ \quad\text{eller} \\ 10x=\pi-6x+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{2} \\ \text{eller} \\ x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{8}, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: $\frac{1}{4}(\sin 4x+\sin 6x-\sin 10x)$; $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbf{Z}$.

6. Det komplexa talet $4i-4$ ligger i andra kvadranten och kan skrivas

$$4i-4=\sqrt{32}e^{i3\pi/4}=4\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

På samma sätt,

$$1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}.$$

Detta medför att

$$\frac{4i-4}{1-i\sqrt{3}}=2\sqrt{2}e^{i\pi(3/4+1/3)}=2\sqrt{2}e^{i13\pi/12}.$$

Låt nu $z+2i=w$ och $w=re^{i\varphi}$, där $r\geq 0$ och $\varphi\in\mathbf{R}$. Då måste

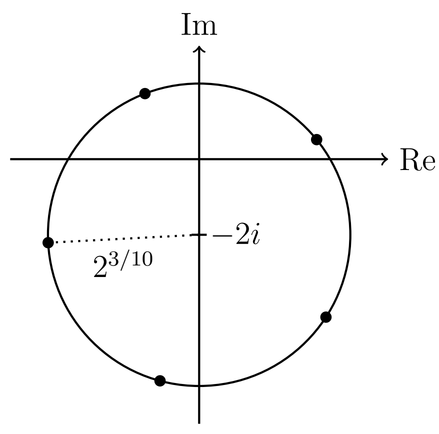
$$w^5=r^5e^{i5\theta}=2\sqrt{2}\,e^{i13\pi/12} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r^5=2\sqrt{2},\ r\geq 0, \\ 5\theta=13\pi/12+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r=(2\sqrt{2})^{1/5}=2^{3/10}$ och $\varphi=\dfrac{13\pi}{60}+\dfrac{2n\pi}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Eftersom $z=-2i+w$ blir nu våra lösningar

$$z=-2i+2^{3/10}\,e^{i\left(\frac{13\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)},\quad n=0,1,2,3,4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n=5$ får vi samma lösning som när $n=0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n\in\mathbf{Z}$ godtycklig.

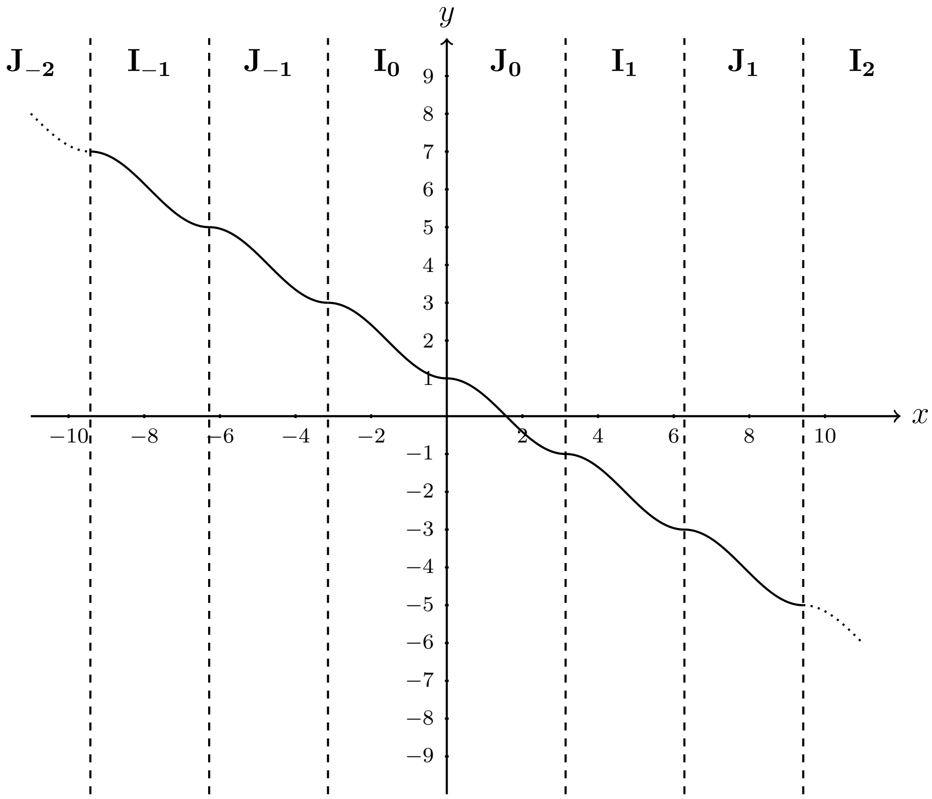


Svar: $z=-2i+2^{3/10}\,e^{i\left(\frac{13\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n=0,1,2,3,4$.

7. Vi börjar med att skissa hur funktionen ser ut. Om $k = 0$ och $0 \leq x < \pi$ är $f(x) = \cos x$. Om $k = 0$ och $-\pi \leq x < 0$ är $f(x) = 2 - \cos x$. Vi ser att uttrycken "hakar i" varandra när $x = 0$ eftersom $\cos 0 = 2 - \cos 0$. Samma beteende upprepas när $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, med skillnaden att funktionen har skiftats $4k$ enheter i vertikal led.

   Vi definierar intervallen I_k och J_k, $k \in \mathbf{Z}$, enligt

$$I_k = [(2k-1)\pi,\, 2k\pi[\quad \text{och} \quad J_k = [2k\pi,\, (2k+1)\pi[.$$



   Vi ser i figuren att även om funktionen inte är periodisk, så finns det en form av periodisk symmetri. Mycket riktigt är $f(x + 2\pi) = f(x) - 4$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Vidare vet vi att om $-\pi \leq x < 0$ så gäller att

$$f(x+\pi) = \cos(x+\pi) = -\cos x = 2 - \cos x - 2 = f(x) - 2,$$

   vilket visar att $f(x+\pi) = f(x) - 2$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Det räcker alltså i princip att betrakta till exempel intervallet J_0 där $0 \leq x < \pi$. För $x \in J_0$ är f strängt avtagande, så f måste vara strängt avtagande på hela $\mathbf{R}$. Således är f injektiv och har en invers f^{-1}. Låt $y = f(x)$ så att $x = f^{-1}(y)$. Då är

$$f(x+\pi) = f(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \pi = f^{-1}(f(x) - 2) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) + \pi = f^{-1}(y-2).$$

   För $x \in J_0$ gäller sedan att

$$y = f(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \arccos(y), \quad -1 < y \leq 1.$$

   Alltså kommer

$$f^{-1}(y - 2k) = \arccos(y - 2k), \quad 2k - 1 < y \leq 2k + 1.$$

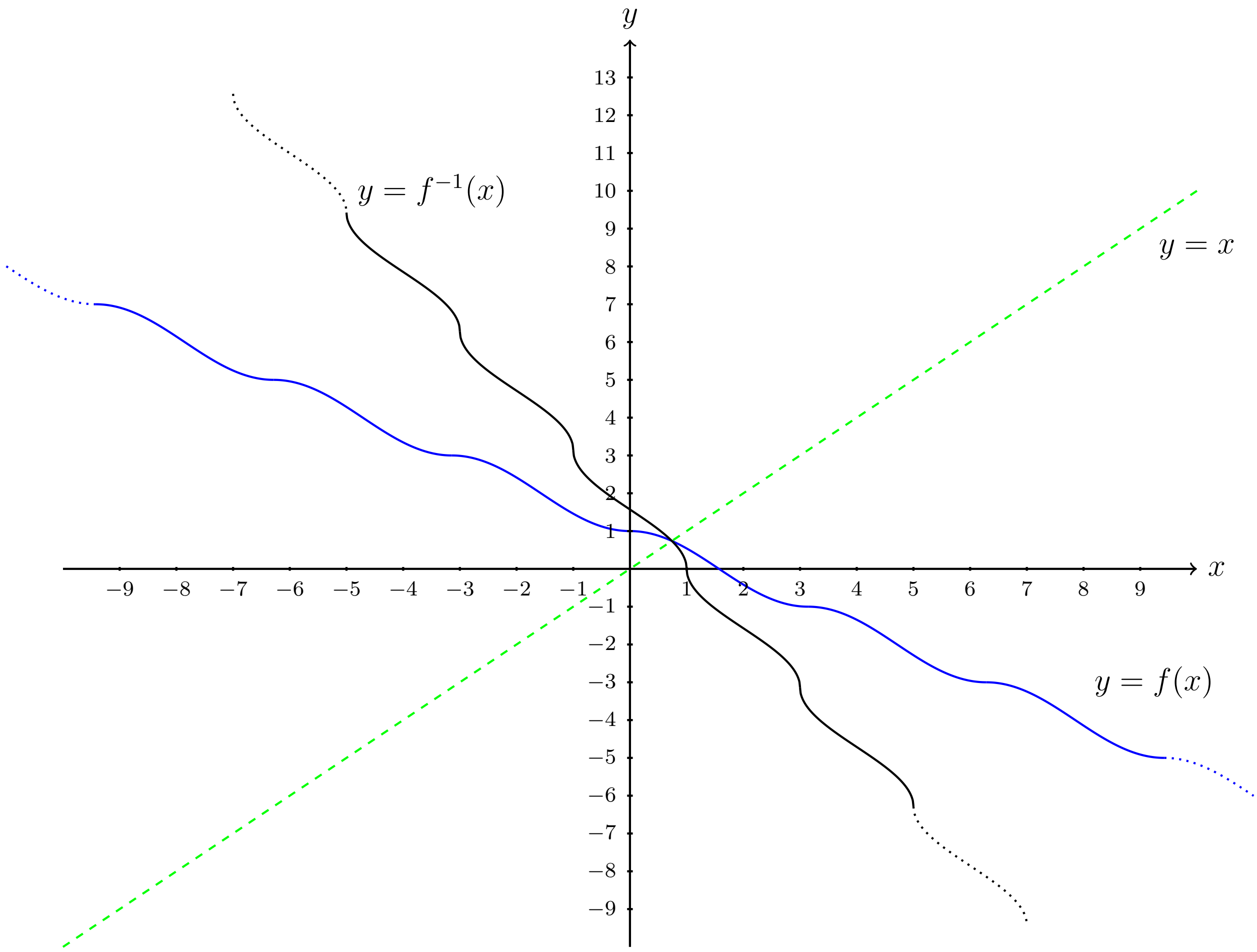
Men då vi vet att $f^{-1}(y-2k) = f^{-1}(y) + k\pi$, så måste

$$f^{-1}(y) = \arccos(y-2k) - k\pi, \quad 2k-1 < y \leq 2k+1.$$

Inversen kan alltså skrivas

$$f^{-1}(y) = \arccos(y-2k) - k\pi, \quad 2k-1 < y \leq 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Hur ser då inversen ut? Som bekant (eller hur?) ges grafen av speglingen av $y = f(x)$ i linjen $y = x$, vilket stämmer överens med det uttryck vi fått fram ovan.



Svar: Figuren och uttryck för inversen finns ovan.

Alternativ II. Det går även att direkt angripa varje intervall I_k och J_k för att hitta ett uttryck för inversen, men det blir lite mer otympligt. Låt $k \in \mathbf{Z}$. Vi undersöker varje delintervall som $f(x)$ är definierad på. Vi börjar med att undersöka $f(x)$ när $x \in I_k$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2-4k-\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 2-4k-y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\arccos(2-4k-y) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

eftersom $y \in]1-4k, 3-4k]$ så $2-4k-y \in [-1,1]$. Vi söker $x \in I_k$, så den enda lösningen som uppfyller kraven är

$$x = -\arccos(2-4k-y) + 2\pi k, \quad 1-4k < y \leq 3-4k, \tag{3}$$

där vi valt minuslösningen samt $n = k$. Alltså är $f^{-1}(y) = 2\pi k - \arccos(2 - 4k - y)$ för $y \in]1 - 4k, 3 - 4k]$. Det är också klart att $f(x)$ är strängt avtagande på intervallet eftersom cos är strängt växande på detta intervall.

Om $x \in J_k$, dvs $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$, så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -4k + \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 4k + y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos(4k + y) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

eftersom $y \in] - 1 - 4k, 1 - 4k]$ så $4k + y \in [-1, 1]$. Vi behöver ha $x \in J_k$, så

$$x = \arccos(4k + y) + 2\pi k, \quad -1 - 4k < y \leq 1 - 4k, \tag{4}$$

där vi valt den positiva lösningen samt $n = k$, eftersom detta är den enda möjligheten. Alltså är $f^{-1}(y) = 2\pi k + \arccos(4k + y)$ för $y \in] - 1 - 4k, 1 - 4k]$. Även här är f strängt avtagande.

Vi ser att funktionen hänger ihop i skarvarna och att minpunkten i föregående intervall I_k blir maxpunkten i nästa intervall J_k. Funktionen är alltså inverterbar på hela $\mathbf{R}$. För att uttrycka definitionsmängden för f^{-1} i ”växande” ordning (som vi normalt gör) ersätter vi ”$-k$” med ”k” i (3) och (4) ovan och erhåller då att

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -2\pi k + \arccos(y - 4k), & -1 + 4k < y \leq 1 + 4k, \\ -2\pi k - \arccos(2 + 4k - y), & 1 + 4k < y \leq 3 + 4k, \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Övning: visa att (5) och (2) representerar samma funktion.