Lösningsskiss till dugga 2 i Matematisk grundkurs

2017–11-10

1. (a) Vi gör falluppdelning: $|2-x| = \begin{cases} x-2 & , \quad \text{då } x \geq 2 \\ 2-x & , \quad \text{då } x \leq 2 \end{cases}$

   - Om $x \geq 2$ så är $|2-x| + 3x = 5 \iff x - 2 + 3x = 5 \iff x = 7/4$, men detta x uppfyller inte villkoret $x \geq 2$ så det finns inga $x \geq 2$ som uppfyller ekvationen.
   - Om $x \leq 2$ så är $|2-x| + 3x = 5 \iff 2 - x + 3x = 5 \iff x = 3/2$, som uppfyller villkoret $x \leq 2$. Alltså är $x = 3/2$ en lösning till ekvationen.

   (*kontrollera genom att sätta in $x = 3/2$ i den ursprungliga ekvationen*)

   Svar: $x = 3/2$.

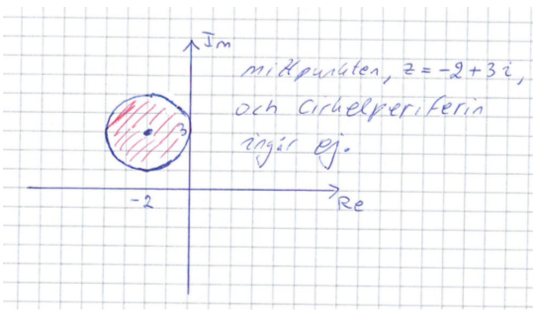
   (b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{130}(3k-1) = 11 + 14 + 17 + \ldots 389$ är en aritmetisk summa (differens$= 3$) med första term$=11$, sista term$=389$ och med antal termer$= 130-4+1 = 127$. Således är $\displaystyle\sum_{k=4}^{130}(3k-1) = 127 \cdot \frac{11+389}{2} = 127 \cdot 200 = 25\,400$.

   Svar: $25\,400$.

   (c) $|z-a|$ anger avståndet mellan z och a. Således är $|z+2-3i| = |z-(3i-2)|$ lika med avståndet mellan z och punkten $3i-2$. Detta avstånd ska vara mindre än 2 och större än noll, så olikheten beskriver en punkterad cirkelskiva kring medelpunkten $3i-2$ och med radie 2. Den yttre cirkeln ingår inte i mängden, och det gör inte heller medelpunkten själv.
   Alternativ: Med $z = a + bi$, där a och b är reella så fås $0 < |z+2-3i| < 2 \iff$

   $\iff 0 < |(a+2) + i(b-3)| < 2 \iff 0 < \sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2} < 2 \iff$

   $\iff$ /alla led är positiva/ $\iff 0 < (a+2)^2 + (b-3)^2 < 2^2$ vilket är en punkterad cirkelskiva runt $(-2, 3)$, dvs kring $-2+3i$, med radie 2, och där cirkelperiferin inte ingår.



   (*kontrollera några punkter ur din mängd för att se om de uppfyller olikheterna*)

   Svar: En punkterad cirkelskiva kring punkten $3i-2$ med radie 2 (cirkeln och medelpunkten ingår ej).

2. (a) Uttrycken är definierade då $x+2>0$, $3-x<0$ och $x+5>0$ dvs då $-2<x<3$. För dessa x fås

$\ln(x+2) = \ln(3-x) - \ln(x+5) \iff \ln(x+2) + \ln(x+5) = \ln(3-x) \iff$

$\iff \ln\left((x+2)(x+5)\right) = \ln(3-x) \iff \big/\text{ln är injektiv}\big/ \iff$

$\iff (x+2)(x+5) = 3-x \iff \big/\text{lös andragradsekvationen}\big/ \iff$

$\iff x = -1$ eller $x = -7$. Men av dessa är det bara $x = -1$ som uppfyller villkoret $-2<x<3$ så $x=-1$ är enda lösningen till ekvationen.

(*kontrollera genom att sätta in $x=-1$ och $x=-7$ i ursprungliga ekvationen*)

Svar: $x = -1$.

(b) $4^x + 2^{x+1} = \dfrac{5}{4} \iff (2^x)^2 + 2\cdot 2^x = \dfrac{5}{4}$. Sätt $t = 2^x > 0$ så fås ekvationen $t^2 + 2t = \dfrac{5}{4}$ med lösningarna $t = \dfrac{1}{2}$ (eller $t = -\dfrac{5}{2} < 0$). Slutligen fås $t = \dfrac{1}{2} \iff 2^x = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ vilket endast har lösningen $x = -1$ (eftersom $y = 2^x$ är en injektiv funktion.

(*kontrollera genom att sätta in $x=-1$ i den ursprungliga ekvationen*)

Svar: $x = -1$.

3. (a) Vi har ekvationen $2\sin^2 x + \sin x = 1$. Sätt $t = \sin x$ så fås ekvationen $2t^2 + t = 1$, som har lösningarna $t=-1$ eller $t = \dfrac{1}{2}$, dvs $\sin x = -1$ eller $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

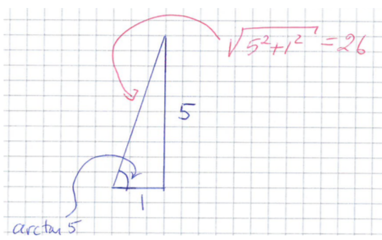
$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases}$$

där n är heltal

(*kontrollera genom att sätta in lösningarna i den ursprungliga ekvationen*)

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

(b) Eftersom $0 < \arctan 5 < \pi/2$, så kan $\arctan 5$ illustreras i en triangel, med motstående sida $=5$ och närliggande sida $=1$, och hypotenusan $=\sqrt{26}$ (enl Pythagoras sats).



Således är $\cos(\arctan 5) = 1/\sqrt{26}$.

Svar: $1/\sqrt{26}$.

4. (a) $f(x)$ är definierad då $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$. Teckentabell, som tidigare, ger att olikheten är uppfylld då $x > 1$ eller $x < -2$, vilket är definitionsmängden. För dessa x gäller att $y = \ln \dfrac{x-1}{x+2} \iff e^y = \dfrac{x-1}{x+2} \iff (x+2)e^y = x-1 \iff$
$\iff x(1-e^y) = 2e^y + 1 \iff x = \dfrac{2e^y+1}{1-e^y} = f^{-1}(y)$, eftersom varje y ger högst ett x-värde.
(*kontrollera definitionsmängden (kolla några x-värden) och räkna även ut t ex $b = f(2)$ och $f^{-1}(b)$*)

Svar: $D_f = \{x : x > 1 \text{ eller } x < -2\}$ och $f^{-1}(x) = \dfrac{2e^x+1}{1-e^x}$.

(b) e^x, e^y och e^{x-y} är positiva för alla x och y, så vi kan titta på logaritmen för leden och använda logaritmlagar.
$\ln(V.L.) = \ln \dfrac{e^x}{e^y} = \ln e^x - \ln e^y = x - y$ och $\ln(H.L.) = \ln e^{x-y} = x - y$. Således är $\ln(V.L.) = \ln(H.L.)$, och eftersom ln är injektiv innebär detta att $V.L. = H.L.$, vilket skulle bevisas.

5. $\cos^3 x = \Big/\text{Eulers formel}\Big/ = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \Big/\text{binomialutveckling}\Big/ =$

$$= \frac{\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3}{8} = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} =$$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 3\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$. Av detta följer sedan att
$4\cos^3 2x = 5\cos 2x - \cos 6x \iff \cos 6x + 3\cos 2x = 5\cos 2x - \cos 6x \iff$
$\iff 2\cos 6x = 2\cos 2x \iff \cos 6x = \cos 2x \iff 6x = \pm 2x + 2n\pi \iff$
$\iff x = \dfrac{n\pi}{2}$ eller $x = \dfrac{n\pi}{4}$, varav den första lösningsskaran i den andra.
(*kontrollera Euler-omskrivningengenom att sätta in några lämpliga värden på x före och efter omskrivningen, kontrollera lösningarna till ekvationen genom direkt insättning*)

Svar: $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{4}\cos x$, ekvationen har lösningarna $x = \dfrac{n\pi}{4}$ där n är heltal.

6. (a) Rita in punkterna $1+i$ och $1-i\sqrt{3}$ i komplexa talplanet så blir det enklare.

$$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4+i\pi/3} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{7\pi i/12}.$$

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{7\pi i/12}$.

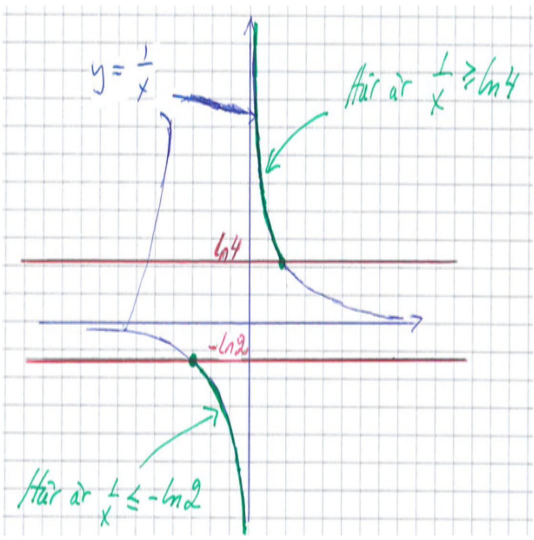
(b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) =$
$= \Big/ \sin v = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos v = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ har lösningarna $v = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi$ och $-\pi < \dfrac{3\pi}{4} \le \pi \Big/ =$
$= \sqrt{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos x + \cos\dfrac{3\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.
(*kontrollera omskrivningen genom att sätta in några lämpliga x-värden*)

Svar $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

7. Sätter $t = e^{1/x}$ så ska vi undersöka olikheten $t \geq \dfrac{5t+8}{2t-1}$. Sedvanlig hantering (omflyttning, gemensam nämnare, faktorisering, teckentabell) ger att den olikheten är uppfylld då $t \geq 4$ eller $-1 \leq t < \dfrac{1}{2}$, så $e^{1/x} \geq 4$ eller $-1 \leq e^{1/x} < \dfrac{1}{2}$.

Sedan hanterar vi dessa olikheter var för sig.

- $e^{1/x} \geq 4 \iff \Big/\text{exponentialfunktionen är strängt växande}\Big/ \iff \dfrac{1}{x} \geq \ln 4 \iff$
  $\iff 0 < x \leq \dfrac{1}{\ln 4}$
- $-1 \leq e^{1/x} < \dfrac{1}{2}$: $e^{1/x} < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{x} < \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2 \iff -\dfrac{1}{\ln 2} < x < 0$. Den vänstra olikheten blir automatiskt uppfylld när den högra är det; $e^{1/x}$ kan inte bli mindre än 0.



Svar $-\dfrac{1}{\ln 2} < x < 0 \quad$ eller $\quad 0 < x \leq \dfrac{1}{\ln 4}$.