Lösningsskiss till dugga 2 i Matematisk grundkurs

2018–10-22

1. (a) $4+6+\ldots+256 = \sum_{k=1}^{127}(2+2k) = $ /aritmetisk summa med differens 2 och 127 termer/ $=$ $127 \cdot \frac{4+256}{2} = 127 \cdot 130 = 16\,510.$ Svar: $16\,510$.

   (b) $\frac{2}{x+2} < \frac{3}{x-1} \iff \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-1} = \frac{-x-8}{(x+2)(x-1)} < 0 \iff \frac{x+8}{(x+2)(x-1)} > 0.$

   Teckentabellen

x		-8		-2		1	
$x+8$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

   visar att olikheten gäller för $-8 < x < -2$ eller $x > 1$.

   Svar: Olikheten gäller för $-8 < x < -2$ eller $x > 1$.

   (c) Eftersom $0 < \frac{1}{4} < 1$ så är $0 < \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$. Alltså är $\arccos\frac{1}{4}$ en vinkel i en rätvinklig triangel med närliggande sida$=1$ och hypotenusa$=4$. Pythagoras sats ger att motstående sida$=\sqrt{15}$, så $\sin(\arccos\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Svar: $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

   (d) $\frac{4-3i}{2-i} = \frac{(4-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{11-2i}{5}$, så $\operatorname{Re}\left(\frac{4-3i}{2-i}\right) = \frac{11}{5}$. Svar: $\frac{11}{5}$.

   (e) Först noterar vi att $\arcsin(\sin x) = x$ då $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   $\sin v = \sin\frac{6\pi}{5} \iff v = \frac{6\pi}{5} + 2n\pi$ eller $v = \pi - \frac{6\pi}{5} + 2n\pi$, där n är heltal, och av alla dessa vinklar är det endast $-\frac{\pi}{5}$ som ligger i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Alltså är $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$. Svar: $-\frac{\pi}{5}$

2. $2^{2x} + 4^x = 2^{2+x} + 16 \iff (2^x)^2 + (2^x)^2 = 4 \cdot 2^x + 16 \iff /t = 2^x/ \iff$ $\iff t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = 0 \iff t = 2^x = -2$ (går ej) eller $t = 2^x = 4 \iff$ $x = 2$.

   Svar: $x = 2$.

3. $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0 \iff \sin x\cdot(\sin x + \cos x) = 0 \iff \sin x = 0$ eller $\sin x + \cos x = 0$.

   - $\sin x = 0 \iff x = n\pi$ där n är heltal.
   - $\sin x + \cos x = 0 \iff \cos x = -\sin x = \sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \iff$ $\iff x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2n\pi \iff x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ där n är heltal.

   Svar: $\sin x = 0 \iff x = n\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ där n är heltal.

4. Uttrycken är definierade då $3 - x > 0, x + 3 > 0$ och $x + 1 > 0 \iff -1 < x < 3$.

   För dessa x gäller att $\ln(3-x) - \ln(x+3) = \ln(x+1) \iff \ln(3-x) = \ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+3)(x+1) \iff 3 - x = x^2 + 4x + 3 \iff x^2 + 5x = 0 \iff x = 0$ ty -5 ligger utanför intervallet. Svar: $x = 0$.

5. $\cos^3 x = /\text{Euler}/ = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8} = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$

Svar: $\frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$

6. f är definierad då $\frac{x+1}{x+2} \geq 0 \iff x < -2$ eller $x \geq -1$.

$y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \implies y^2 = \frac{x+1}{x+2} \iff x = \frac{1-2y^2}{y^2-1}$. Således är $f^{-1}(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$, $D_f = \{x : x < -2 \text{ eller } x \geq -1\}$.

7. $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{12}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x) = \Big/ \cos(-\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2,\ \sin(-\frac{\pi}{6}) = -1/2 \Big/ = \sqrt{12}(\sin x\cos(-\pi/6) + \cos x \sin(-\pi/6)) = \sqrt{12}\sin(x - \pi/6)$. Således är $3\sin 5x - \sqrt{3}\cos 5x = 3 \iff \sqrt{12}\sin(5x - \pi/6) = 3 \iff \sin(5x - \pi/6) = \sqrt{3}/2 = \sin\frac{\pi}{3} \iff 5x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ eller $5x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \iff x = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5}$ där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: $x = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5}$ där n är ett godtyckligt heltal.

8. Låt $z + 2 - i = re^{iv}$ $(r \geq 0)$ och skriv högerledet på polär form, $i - 1 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, så fås

$$\left(re^{iv}\right)^7 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4} \iff r^7 e^{7iv} = \sqrt{2}e^{3\pi i/4} \iff \begin{cases} (\text{Abs}):\ r^7 = \sqrt{2} = 2^{1/2} \\ (\text{Arg}):\ 7v = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r = 2^{1/14} = \sqrt[14]{2} \\ v = \frac{3\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7} \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbf{Z} \text{ och vi får}$$

$z = re^{iv} - 2 + i = \sqrt[14]{2}e^{\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}\right)i} - 2 + i\ ,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Svar: $z = \sqrt[14]{2}e^{\left(\frac{3\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}\right)i} - 2 + i\ ,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

9. Till att börja med ser vi att $-1 < -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} < 0$, så $\frac{\pi}{2}$ arccos $\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) < \pi$. Således är $\pi < \alpha < 2\pi$. Vidare är $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ för något heltal n. Av alla dessa vinklar är det endast $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ som ligger i intervallet $\pi < \alpha < 2\pi$. Således är $\alpha = \frac{11\pi}{6}$.

Svar: $\alpha = \frac{11\pi}{6}$.