Lösningsskiss till dugga 2 i Matematisk grundkurs

2018–11-16

1. (a) Falluppdelning ger $|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ då } x \geq 3 \\ 3-x \text{ då } x \leq 3. \end{cases}$ Därmed får vi två fall:

   - Om $x \leq 3$ så fås $|x-3| - 2x = 1 \iff 3 - x - 2x = 1 \iff x = 2/3$, som uppfyller villkoret $x \leq 3$, dvs $x = 2/3$ är en lösning.
   - Om $x \geq 3$ så fås $|x-3| - 2x = 1 \iff x - 3 - 2x = 1 \iff x = -4$, som **inte** uppfyller villkoret $x \geq 3$ dvs i detta intervall finns ingen lösning.

   Svar: $x = 2/3$.

   (b) $\dfrac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{\ln\sqrt{e}} = \dfrac{e^{\ln 9}/e^{\ln 2}}{\frac{1}{2}\ln e} = \dfrac{9/2}{1/2} = 9.$

   Svar: 9.

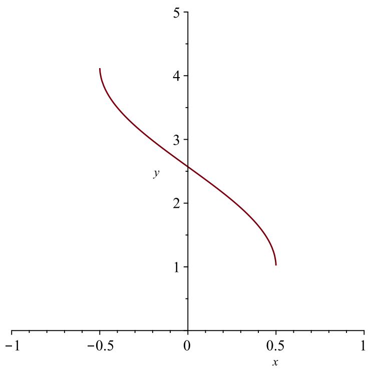
   (c) $z = i\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = \Big/ \cos v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin v = \dfrac{1}{2}$ har en lösning $v = \dfrac{5\pi}{6} \Big/ = \sqrt{12}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{12}e^{5\pi i/6}.$

   Svar: $\sqrt{12}e^{5\pi i/6}$.

   (d) Eftersom $0 < \dfrac{1}{7} < 1$ så är $0 < \arcsin\dfrac{1}{7} < \dfrac{\pi}{2}$. Alltså är $\arcsin\dfrac{1}{7}$ en vinkel i en rätvinklig triangel med motstående $= 1$ och hypotenusa $= 7$. Pythagoras sats ger att närliggande sida $= \sqrt{48}$, så $\tan(\arcsin\dfrac{1}{7}) = \dfrac{1}{\sqrt{48}}$.

   Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{48}}$.

   (e) $\arccos 2x$ är definierad då $-1 \leq 2x \leq 1$, dvs då $-1/2 \leq x \leq 1/2$. På detta intervall är $\arccos 2x$ strängt avtagande och antar alla värden mellan 0 och π. Det innebär att $f(x) = 1 + 3\arccos 2x$ är definierad då $-1/2 \leq x \leq 1/2$ och där är $f(x)$ strängt avtagande och $1 \leq f(x) \leq 1 + 3\pi$. Grafen har följande utseende:



2. Logaritmerna är definierad då $x + 3 > 0$ och $9 - x > 0 \iff -3 < x < 9$. För dessa x fås $\ln(x+3) = 2\ln(9-x) \iff \ln(x+3) = \ln(9-x)^2,\ -3 < x < 9 \iff$ $\Big/ \ln$ strängt växande $\Big/ \iff$

   $\iff x + 3 = (9-x)^2,\ -3 < x < 9 \iff x^2 - 19x + 78 = (x - 19/2)^2 - 361/4 + 312/4 =$
   $= (x - 19/2)^2 - 49/4 = (x - 19/2 - 7/2)(x - 19/2 + 7/2) = (x-13)(x-6) = 0,$
   $-3 < x < 9 \iff x = 6.$

   Svar: $x = 6$.

3. $x < \dfrac{2x}{2x+1} \iff x - \dfrac{2x}{2x+1} < 0 \iff \dfrac{x(2x+1)-2x}{2x+1} < 0 \iff$

$\iff \dfrac{2x^2-x}{2x+1} < 0 \iff \dfrac{2x(x-1/2)}{2(x+1/2)} < 0 \iff \dfrac{x(x-1/2)}{x+1/2} < 0.$

Teckentabellen

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$x+1/2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1/2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-1/2)}{x+1/2}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller för $x < -1/2$ eller $0 < x < 1/2$.

Svar: $x < -1/2$ eller $0 < x < 1/2$.

4. $\sqrt{3}\cos v + \sin v = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos v + \dfrac{1}{2}\sin v\right) = \Big/ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2},$

$0 < \alpha \leq 2\pi$ ger $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \Big/ = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos v + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin v\right) = 2\sin\left(v + \dfrac{\pi}{3}\right).$

Svar: $A = 2,\ \alpha = \dfrac{\pi}{3}.$

5. f är definierad då $x + 1 \geq 0$, dvs då $x \geq -1$. För dessa x fås

$y = \dfrac{7-\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}} \iff y\cdot(3+\sqrt{x+1}) = 7 - \sqrt{x+1} \iff (y+1)\sqrt{x+1} = 7 - 3y \iff$

$\sqrt{x+1} = \dfrac{7-3y}{y+1} \implies x + 1 = \left(\dfrac{7-3y}{y+1}\right)^2 \iff x = \left(\dfrac{7-3y}{y+1}\right)^2 - 1$, så varje y ger

högst ett x-värde, dvs f är injektiv och $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{7-3y}{y+1}\right)^2 - 1.$

Svar: $D_f = \{x:\ x \geq -1\}$ och $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{7-3x}{x+1}\right)^2 - 1.$

6. $\cos 2x = 3\cos x + 1 \iff \Big/ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Big/ \iff 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \iff$

$\iff \Big/ \cos x = t, -1 \leq t \leq 1 \Big/ \iff t^2 - \dfrac{3}{2}t - 1 = (t - 3/4)^2 - 9/16 - 1 =$

$= (t - 3/4 - 5/4)(t - 3/4 + 5/4) = (t-2)(t+1/2) = 0,\ -1 \leq t \leq 1 \iff t = -1/2 \iff$

$\iff \cos x = -1/2 \iff x = 2\pi/3 + n\cdot 2\pi$ eller $x = -2\pi/3 + n\cdot 2\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: $x = 2\pi/3 + n\cdot 2\pi$ eller $x = -2\pi/3 + n\cdot 2\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

7. $\sin^2 3x\cos 5x = \Big/$ Eulers formler $\Big/ = \left(\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right) =$

$= \left(\dfrac{e^{6ix}-2+e^{-6ix}}{-4}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right) = -\dfrac{e^{11ix}+e^{-11ix}-2(e^{5ix}+e^{-5ix})+e^{ix}+e^{-ix}}{8} =$

$= \dfrac{1}{4}(2\cos 5x - \cos 11x - \cos x)$. Således är $4\sin^2 3x\cos 5x = \cos 5x - \cos x \iff$

$\iff 2\cos 5x - \cos 11x - \cos x = \cos 5x - \cos x \iff \cos 11x = \cos 5x \iff$

$\iff 11x = \pm 5x + 2n\pi \iff x = \dfrac{n\pi}{8}$ eller $x = \dfrac{n\pi}{3}$.

Svar: $x = \dfrac{n\pi}{8}$ eller $x = \dfrac{n\pi}{3}$ där n är ett godtyckligt heltal.

8. (a) Om $x_2 > x_1$ så är $e^{x_2} > e^{x_1}$ och $e^{-x_2} < e^{-x_1}$ (eftersom exponentialfunktionen är strängt växande). Alltså blir $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(e^{x_2} - e^{x_1}) + (e^{-x_1} - e^{-x_2})}{2} > 0$ eftersom uttrycken inom båda parenteserna är > 0. Således är f strängt växande, vilket skulle visas.

(b) $y = \sinh x \iff y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{(e^x)^2 - 1}{2e^x} \iff 2y \cdot e^x = (e^x)^2 - 1 \iff$ $\iff \Big/ t = e^x > 0 \Big/ \iff t^2 - 2yt - 1 = 0 \iff t = y \pm \sqrt{y^2+1}$, men eftersom $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$ så ser vi att $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. Alltså blir enda lösningen $t = y + \sqrt{y^2+1}$, ty $t > 0$, dvs $x = \ln t = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Således är $f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Svar: $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

9. Använd polär omskrivning. $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{\pi i/4}}{2e^{-\pi i/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi i/4 - (-\pi i/3)} = 2^{-1/2}e^{7\pi i/12}$.

Låt $\dfrac{z+1}{z-i} = w = re^{iv}$, där $r \geq 0$ och v är reell. Då fås $\left(re^{iv}\right)^4 = 2^{-1/2}e^{7\pi i/12} \iff$ $\iff r^4 e^{4iv} = 2^{-1/2}e^{7\pi i/12}$. Identifiering av absolutbelopp och argument ger

$$\begin{cases} r^4 = 2^{-1/2} \\ 4v = 7\pi/12 + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = r^{-1/8} \\ v = 7\pi/48 + n\pi/2 \end{cases}$$

så $w = 2^{-1/8}e^{(7\pi/48 + n\pi/2)i}$, där $n = 0, 1, 2, 3$. Slutligen fås $\dfrac{z+1}{z-i} = w \iff z = \dfrac{1+iw}{w-1}$.

Svar: $z = \dfrac{1 + i \cdot 2^{-1/8}e^{(7\pi/48 + n\pi/2)i}}{2^{-1/8}e^{(7\pi/48+n\pi/2)i} - 1}$, där $n = 0, 1, 2, 3$.