Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Martin Bengtsson

Lösningar till tentamen i Matematisk grundkurs TATA68 2016-01-04, kl. 14-19

---

1. (a) Vi möblerar om och kvadrerar:

$$x+\sqrt{3-2x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3-2x}=-x \quad\Rightarrow\quad 3-2x=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x+3)(x-1)=0.$$

Kandidaten $x=1$ löser inte ekvationen eftersom $1+\sqrt{1}=2\neq 0$. Däremot löser kandidaten $x=-3$ ekvationen ty $-3+\sqrt{3+6}=-3+3=0$. Observera att denna kontroll är **nödvändig** för att lösningen ska vara korrekt (på grund av implikationen ovan).

(b) Då ln är injektiv följer det att

$$\begin{aligned} \ln\left(e^x+2\right)=x+\ln 2 \quad&\Leftrightarrow\quad e^x+2=e^{x+\ln 2}=e^{\ln 2}e^x=2e^x \\ &\Leftrightarrow\quad e^x=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln 2. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x=-3$. (b) $x=\ln 2$.

2. Eftersom $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ kan vi enligt Eulers formler skriva

$$\begin{aligned} \sin^2 x\cos 3x &= \frac{1}{2}\cos 3x-\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{4}\right)\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{8}\left(e^{i5x}+e^{-i5x}+e^{ix}+e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos 5x-\frac{1}{4}\cos x. \end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför formuleras som

$$\begin{aligned} 2\cos 3x-\cos 5x-\cos x+\cos 5x+\cos x=\sqrt{2} \quad&\Leftrightarrow\quad \cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow\quad 3x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ &\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}, \end{aligned}$$

där $n\in\mathbf{Z}$.

Svar: $\sin^2 x\cos 3x=\dfrac{1}{2}\cos 3x-\dfrac{1}{4}\cos 5x-\dfrac{1}{4}\cos x$; $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $x>0$ är kravet för att logaritmen ska vara definierad. Vidare får inte

$$1-\ln 3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{e}{3}.$$

Alltså blir

$$D_f=\left\{x\in\mathbf{R}\ :\ x>0,\ x\neq\frac{e}{3}\right\}.$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{1-\ln 3x} \quad &\Rightarrow \quad y(1-\ln 3x) = 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{y-2}{y} = \ln 3x \\ &\Rightarrow \quad 3x = \exp\left(1 - \frac{2}{y}\right) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\exp\left(1 - \frac{2}{y}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} \ : \ x > 0, \ x \neq \frac{e}{3}\right\}$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\exp\left(1 - \frac{2}{y}\right)$.

4. För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x < 4$ och $2 - |x| > 0$. Eftersom

$$2 - |x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$$

kan alla villkor ersättas med $-2 < x < 2$. För dessa x gäller att

$$\begin{aligned} \ln(2-|x|) + \ln(4-x) = \ln 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln((2-|x|)(4-x)) = \ln(5) \\ &\Leftrightarrow \quad (2-|x|)(4-x) = 5, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att ln är injektiv. Vi delar upp i två fall.
Först när $-2 < x \leq 0$. Då ges ekvationen av

$$(2+x)(4-x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm 2.$$

Endast $x = -1$ uppfyller villkoren. När $0 < x < 2$ gäller att

$$(2-x)(4-x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Endast $x = 3 - \sqrt{6}$ uppfyller villkoren.

Svar: $x = -1$ eller $x = 3 - \sqrt{6}$.

5. (a) Om $a, b \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}$ med $n \geq 0$ kan binomialsatsen formuleras som

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$

(b) Vi använder binomialsatsen och utvecklar enligt

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{101} &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} x^{2k} \left(\frac{2}{x}\right)^{101-k} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} 2^{101-k} x^{2k} x^{k-101} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} 2^{101-k} x^{3k-101}. \end{aligned}$$

Termen som innehåller x^{100} förekommer precis en gång i summan ovan, nämligen precis då

$$3k - 101 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad k = 67.$$

Koefficienten före x^{100} blir således $\binom{101}{67} 2^{34}$.

(c) Enligt definitionen $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ för $\theta \in \mathbf{R}$ kan vi skriva

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos y + i\sin y} &= \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos y - i\sin y)}{(\cos y + i\sin y)(\cos y - i\sin y)} \\ &= \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y)}{\cos^2 y + \sin^2 y} \\ &= \cos(x-y) + i\sin(x-y) = e^{i(x-y)},\end{aligned}$$

där vi endast använt välkända trigonometriska formler och definitionen av $e^{i\theta}$.

Svar: (a) Se ovan. (b) $\binom{101}{67}2^{34}$. (c) Se ovan.

6. Låt

$$\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{och} \qquad \gamma = \arctan\frac{1}{7}.$$

Då är

$$\tan\alpha = \tan(2\beta - \gamma) = \frac{\tan 2\beta - \tan\gamma}{1 - \tan 2\beta\tan\gamma}.$$

Eftersom

$$\tan\gamma = \frac{1}{7} \qquad \text{och} \qquad \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

behöver vi räkna ut $\tan\beta$. Vi vet att $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, så

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1/\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(1/\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

enligt den trigonometriska ettan

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

och det faktum att $\cos\beta > 0$. Således erhåller vi nu att

$$\tan 2\beta = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

och därmed att

$$\tan\alpha = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = 1.$$

Eftersom

$$\tan v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste $\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi$ för *något* $n \in \mathbf{Z}$. Eftersom α är en given vinkel, finns det bara ett n som är rätt. Det återstår alltså bara att bestämma n och för att göra det **måste** vi ha en uppfattning om hur stor α är. Vi utnyttjar att $0 < \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ och ser att

$$-\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Detta innebär att $n \neq 0$ ej är möjligt. Alltså är $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Svar: $\frac{\pi}{4}$.

7. För $|z| = 1$ gäller att

$$\begin{aligned}
w = \frac{z-2i}{z+2i} \quad &\Leftrightarrow \quad w(z+2i) = z - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad z(w-1) = -2iw - 2i = -2i(w+1) \\
&\Leftrightarrow \quad z = -2i\frac{w+1}{w-1}.
\end{aligned}$$

Detta innebär att $w \in \mathbf{C}$ måste uppfylla

$$1 = |z| = 2\frac{|w+1|}{|w-1|} \quad \Leftrightarrow \quad |w-1|^2 = 4|w+1|^2.$$

För att se vad detta innebär geometrisk låter vi $w = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
|w-1|^2 = 4|w+1|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a-1)^2 + b^2 = 4\left((a+1)^2 + b^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 + b^2 = 4a^2 + 8a + 4 + 4b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3a^2 + 10a + 3b^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + \frac{10}{3}a + b^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + b^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{5}{3}\right)^2 + b^2 = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

Alltså är detta cirkeln i det komplexa talplanet som ges av $\left|w + \frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}$. Dessa w kan representeras som

$$w = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}e^{i\theta}, \; 0 \le \theta < 2\pi.$$

Svar: $w = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. En cirkel i $\mathbf{C}$ med centrum i $z = -\frac{5}{3}$ och radie $\frac{4}{3}$.