

Lösningförslag TATA68 2016-08-16 14–19

1. (a) Vi flyttar över allt på ena sidan och skriver allt på samma bråk:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 5} < x + 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 2 - (x + 1)(x - 5)}{x - 5} = \frac{7(x + 1)}{x - 5} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 5} < 0. \end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-1		5	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 5$	-		-	0	+
$\frac{x + 1}{x - 5}$	+	0	-	+	+

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $-1 < x < 5$.

- (b) Summan tolkas som aritmetisk och den konstanta skillnaden mellan närliggande termer blir 7. Summan kan därför skrivas $\sum_{k=0}^n (-19 + 7k)$. Vad n måste ha för värde finner vi enkelt genom att skriva

$$-19 + 7n = 674 \Leftrightarrow n = \frac{674 + 19}{7} = \frac{693}{7} = 99.$$

Alltså kan summan räknas ut enligt

$$\sum_{k=0}^{99} (-19 + 7k) = \frac{-19 + 674}{2} \cdot 100 = 32750.$$

- (c) En binomialkoefficient kan definieras genom sambandet $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Ekvivalent är att definiera $\binom{n}{k}$ genom formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Båda dessa uttryck är definierade för heltal n och k sådana att $1 \leq k \leq n$.

Svar: (a) $-1 < x < 5$. (b) 32750. (c) Se ovan.

2. För att logaritmerna ska vara definierade krävs att $x + 2 > 0$, $4 - x > 0$, samt att $x > 0$. Alltså måste $0 < x < 4$ gälla. Antag att detta är sant. Då blir

$$\begin{aligned} \ln(x + 2) - \ln(4 - x) = \frac{1}{2} \ln x &\Leftrightarrow 2 \ln \left(\frac{x + 2}{4 - x} \right) = \ln x \Leftrightarrow \frac{(x + 2)^2}{(4 - x)^2} = x \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 = x(4 - x)^2 \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Vi gissar en rot och finner att $x = 1$ är ett nollställe. Till exempel polynomdivision kan sedan användas för att faktorisera:

$$x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 8x + 4) = 0.$$

Eftersom

$$x^2 - 8x + 4 = (x - 4)^2 - 12 = (x - 4 - \sqrt{12})(x - 4 + \sqrt{12})$$

och $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ så ges alltså alla kandidater till lösningar av $x = 1$ och $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Eftersom $0 < 2\sqrt{3} < 4$ så ligger endast $x = 1$ och $x = 4 - 2\sqrt{3}$ i intervallet $0 < x < 4$.

Svar: $x = 1$ och $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

3. (a) Direkt ur enhetscirkeln ser vi att

$$\sin 5x = \sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + 2\pi n \\ \text{eller} \\ 5x = \pi - 3x + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \end{cases}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Vi utnyttjar additionsformeln för tangens och formulerar om ekvationen enligt

$$\tan 2x = 3 \tan x \Leftrightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x \Leftrightarrow \tan x = 0 \text{ eller } 1 - \tan^2 x = \frac{2}{3}.$$

TVå fall således:

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbf{Z},$$

och

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: (a) πn eller $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) πn eller $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd D_f för f . Vi vet att $\ln t$ endast är definierad då $t > 0$, så vi måste kräva att

$$\frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} > 0 \Leftrightarrow 7 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 7 \Leftrightarrow 2x < \ln 7 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \ln 7.$$

Här har vi utnyttjat att exponentialfunktionen är strängt växande samt att $1 + e^{2x} > 1$ för alla x (och därmed inte kan påverka olikheten). Alltså blir $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x < \frac{1}{2} \ln 7\}$.

Inversen finner vi genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln \frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} \Leftrightarrow e^y = \frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} (1 + e^y) = 7e^y - 1 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{7e^y - 1}{1 + e^y} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{7e^y - 1}{1 + e^y} \right). \end{aligned}$$

Svar: D_f ges av $x < \frac{1}{2} \ln 7$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{7e^y - 1}{1 + e^y} \right)$.

5. (a)

Kända trigonometriska formler resulterar i att

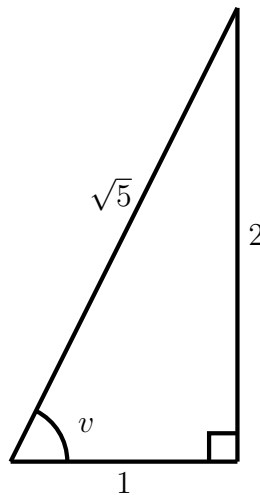
$$\begin{aligned}\cos \arctan (-2) &= \cos (-\arctan 2) \\ &= \cos(\arctan 2).\end{aligned}$$

Vinkeln $\arctan 2$ uppfyller

$$0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2},$$

så ur en hjälptriangel erhåller vi

$$\cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



(b) Vi ser direkt att $\pi/2 < \alpha, \beta < \pi$. Det är komplicerat att jämföra uttrycken direkt, så vi försöker att jämföra tangens för de båda uttrycken i stället. Eftersom tangens är strängt växande på intervallet $[\pi/2, \pi]$ kommer detta att generera samma svar på frågan. Sålunda,

$$\tan \alpha = \tan(2 \arctan 3) = \frac{2 \tan(\arctan 3)}{1 - \tan^2(\arctan 3)} = \frac{6}{1 - 9} = -\frac{3}{4}$$

och

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{+\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{-\sqrt{3/5}} = -\frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{3/5}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

där vi nyttjande den trigonometriska ettan

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{3}{5}$$

och det faktum att $\sin \beta > 0$. Eftersom

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{27}{48} < \frac{32}{48} < \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

så ser vi att $\tan \beta < \tan \alpha$, så $\beta < \alpha$ (tangens strängt växande på intervallet).

Alternativ: det går även bra att ta \cos eller \sin av α respektive β . I fallet \cos utnyttjar vi istället att \cos är strängt avtagande på intervallet.

Svar: (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) Talet α är störst.

6. Ekvationen är binomisk och sådana löser vi oftast genom att gå över till polära koordinater. Först skriver vi ekvationen som

$$\begin{aligned}z^4 &= -25 \cos \frac{\pi}{5} + i \cdot 25 \sin \frac{\pi}{5} = -25 \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right) \\ &= -25 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right) = 25e^{i\pi - i\pi/5} = 25e^{4i\pi/5}.\end{aligned}$$

Sedan skriver vi $z = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$w^4 = r^4 e^{i4\theta} = 25e^{4i\pi/5}.$$



För att (♥) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π . Således måste

$$r^4 = 25 \quad \text{och} \quad 4\theta = \frac{4\pi}{5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r > 0$ måste $r = 25^{1/4} = \sqrt{5}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 4 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2, 3$. Lösningarna till (♥) ges alltså av

$$z = \sqrt{5}e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi n}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Svar: $\sqrt{5} \exp\left(i\frac{\pi}{5} + i\frac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

7. Eftersom $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ kan vi skriva

$$\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z}\right)^n = \left(\frac{z + \bar{z}}{2z}\right)^n = 2^{-n} \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right)^n.$$

Vi använder nu binomialsatsen för att expandera uttrycket ovan enligt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-n} 1^{n-k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\bar{z}z}{z^2}\right)^k \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.