Lösningsförslag TATA68 2017-08-15

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{2x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2-(x^2-9)}{x(x^2-9)} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+9}{x(x-3)(x+3)} \leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-3		0		3	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2+9	$+$		$+$		$+$		$+$
$\dfrac{x^2+9}{x(x-3)(x+3)}$	$-$	☠	$+$	☠	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $x < -3$ eller $0 < x < 3$.

(b) Summan är geometrisk med kvoten e och 99 termer. Således blir

$$\sum_{k=2}^{100} e^k = e^2 \cdot \frac{e^{99}-1}{e-1} = \frac{e^{101}-e^2}{e-1}.$$

(c) Eftersom ordningen inte spelar någon roll, så finns precis

$$\binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2} = 364$$

unika kombinationer. Micke hävdar bestämt att överenskommelsen gällde per dag och tänker nu spendera nästan hela det kommande året med att testa alla kombinationer.

Svar: (a) $x < -3$ eller $0 < x < 3$ (b) $\dfrac{e^{101}-e^2}{e-1}$ (c) 364.

2. (a) Låt $t = 2^x$. Då gäller att

$$8^x - 4^{x+1/2} = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - t^2 4^{1/2} = t \quad \Leftrightarrow \quad t(t^2-2t-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 0,\ t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Eftersom $t > 0$ så kommer endast $t = 1 + \sqrt{2}$ ge en lösning:

$$t = 2^x = 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\ln 2}.$$

(b) Observera att det **inte** finns någon logaritmlag för produkter av logaritmer. Däremot så gäller att

$$\ln x^2 \cdot \ln x^3 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x \cdot 3 \ln x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\pm 2}.$$

Svar: (a) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{2})}{\ln 2}$ (b) $e^{\pm 2}$.

3. (a) Tangens är periodisk med perioden π och $\tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, så

$$\tan^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi kan slå ihop dessa fall enligt

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

(b) Eftersom $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < 2\pi$, så måste

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Då blir

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{6}.$$

(c) Vi ser direkt att

$$v = \arccos(\cos 4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos v = \cos 4 \\ 0 \le v \le \pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = 2\pi - 4$$

eftersom $\cos v = \cos 4$ är uppfyllt precis då $v = 4 + 2n\pi$ eller $v = -4 + 2n\pi$ för något heltal n. Endast $v = 2\pi - 4$ ligger i rätt intervall.

Svar: (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\frac{\sqrt{2}+4}{6}$ (c) $2\pi - 4$.

4. Vi använder Eulers formler för att skriva om vänsterledet enligt

$$\begin{aligned} 4\cos x \sin 2x \cos 3x &= \frac{4}{8i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i3x} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-i3x}\right)\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i6x} + 1 - e^{i2x} - e^{-i4x} + e^{i4x} + e^{-i2x} - 1 - e^{-i6x}\right) \\ &= \sin 6x + \sin 4x - \sin 2x. \end{aligned}$$

Således kan ekvationen vi vill lösa skrivas som

$$\begin{aligned} &\sin 6x + \sin 4x - \sin 2x = \sin 4x + \cos 3x - \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 6x = \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = \cos 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - 6x + 2\pi n = \pm 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases} \end{aligned}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd D_f för f. Vi vet att $\ln t$ endast är definierad då $t > 0$, så vi måste kräva att

$$2 - e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \ln 2.$$

Alltså blir $D_f =]-\infty, \ln 2[$.

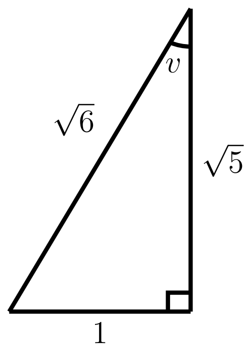
Inversen finner vi genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = x - \ln(2 - e^x) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{e^x}{2 - e^x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2e^y - e^x e^y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x\big(1 + e^y\big) = 2e^y \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2e^y}{1 + e^y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln \frac{2e^y}{1 + e^y}. \end{aligned}$$

Svar: $D_f =]-\infty, \ln 2[$ och $f^{-1}(y) = \ln \dfrac{2e^y}{1 + e^y} = y + \ln 2 - \ln(1 + e^y)$.

6. Låt $\gamma = \arccos\left(-\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)$ så att $\alpha = 2\gamma$.

Om vi nyttjar att $\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ så ser vi direkt ur en hjälptriangel (i figuren är $v = \pi - \gamma$) att



$$\tan\big(\pi - \gamma\big) = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

vilket medför att

$$\tan \gamma = -\tan\big(\pi - \gamma\big) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Uttrycket $\tan \alpha$ kan vi nu beräkna genom additionsformeln för tangens:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} = \frac{-2\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vidare är det klart att även $\tan \beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Därmed följer att

$$\tan \alpha = \tan \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + n\pi$$

för något heltal n. Eftersom α och β är en givna vinklar finns det bara ett n som är rätt. Det återstår alltså bara att bestämma n och för att göra det **måste** vi ha en uppfattning om hur stora α och β är. Då $\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ (ty arccos är strängt avtagande) kommer $\pi < \alpha < 2\pi$. Vidare är $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ eftersom arctan är strängt växande. Så för att $\alpha = \beta + n\pi$ för något heltal n måste $n = 2$. För $n = 1$ blir högerledet för litet och för $n = 3$ för stort. Alltså är $x = 2\pi$.

Svar: $x = 2\pi$.

7. Eftersom $p(z)$ har grad tre så har $p(z)$ tre rötter (om vi räknar med multiplicitet). Om vi betraktar $y = p(x)$ för $x \in \mathbf{R}$, så ser vi att $p(x)$ är strängt växande, så det kan högst finnas en reell rot. Vi försöker se om kurvan $y = p(x)$ skär x-axeln någonstans. Vi testar och finner att $p(-3) = -19$ och $p(-2) = 1$. Således finns det en reell rot $a \in]-3, -2[$ där $p(a) = 0$. Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter så kommer alltid icke-reella rötter som komplex-konjugerade par, så övriga två rötter måste vara på formen $\alpha \pm i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Vi vill alltså visa att $\alpha > 1$. För detta ändamål så betraktar vi faktoriseringen av $p(z)$:

   $$p(z) = (z-a)(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta) = z^3 - (a+2\alpha)z^2 + (2a\alpha+\alpha^2+\beta^2)z - a(\alpha^2+\beta^2).$$

   Eftersom z^2-termen saknas i $p(z)$ så måste därmed $a + 2\alpha = 0$. Enligt ovan är $a < -2$, så

   $$0 = a + 2\alpha < -2 + 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2 < 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \alpha.$$

   Detta var precis vad vi skulle visa!

   Svar: Se ovan.