Lösningsförslag TATA68 2018-01-04

1. (a) Binomialsatsen medför att

$$(2x-1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x)^{5-k}(-1)^k = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.$$

(b) Eftersom

$$\frac{3+4i}{3-i} - |4i-3| = \frac{(3+4i)(3+i)}{10} - \sqrt{4^2+3^2} = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2} - 5 = -\frac{9}{2} + i\frac{3}{2},$$

gäller att realdelen blir $-\dfrac{9}{2}$.

(c) Summan består av 101 termer och har en aritmetisk del med differens 1 och en geometrisk del med kvot 2. Således blir

$$\sum_{k=0}^{100}(k+2^k) = \sum_{k=0}^{100} k + \sum_{k=0}^{100} 2^k = 101 \cdot \frac{0+100}{2} + \frac{2^{101}-1}{2-1} = 5049 + 2^{101}.$$

Svar: (a) $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ (b) $-\dfrac{9}{2}$ (c) $5049 + 2^{101}$.

2. (a) För att alla logaritmer ska vara definierade krävs att $x < 0$, $x < 2$ samt $2x < 7$, så vi måste kräva att $x < 0$. Antag att $x < 0$. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned}
\ln(-x) - \ln(2-x) - \ln(7-2x) = \ln 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(-\frac{x}{(2-x)(7-2x)}\right) = \ln 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -x = 3(2-x)(7-2x) \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{16}{3}x + 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3} \pm \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

där varken $x = 3$ eller $x = \dfrac{7}{3}$ uppfyller att $x < 0$. Ekvationen saknar alltså lösningar.

(b) Eftersom

$$0 = \ln t \cdot \ln\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln t} = -(\ln t)^2 - \frac{1}{\ln t} = -\frac{(\ln t)^3 + 1}{\ln t}$$

följer det att $(\ln t)^3 = -1$. Eftersom $\ln t$ är reell så måste $\ln t = -1$, dvs $t = e^{-1}$.

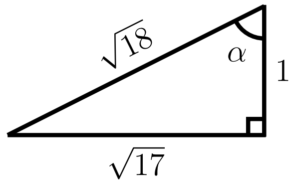
Svar: (a) Lösning saknas. (b) $t = e^{-1}$.

3. (a) Sinus för dubbla vinkeln medför att

$$\begin{aligned}
\sin 2x = 2\sin x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = 2\sin x \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \text{ eller } \cos x = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

(b) Vi ser att $\alpha = \arctan\sqrt{17} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\tan\alpha = \sqrt{17}$. Ifrån denna triangel kan vi se att $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$.



Då arcsin definieras av sambandet

$$v = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin v = x \text{ och } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

och $\sin\frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right)$ följer det att

$$\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$$

eftersom $\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svar: (a) $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\sin\left(\arctan\sqrt{17}\right) = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$ och $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

4. Uttrycket x^α definieras enligt

$$x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln x\right), \quad x > 0, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Om vi låter $t = x^{1/4}$, $x > 0$, övergår ekvationen i

$$12t + t^2 = 3t^3 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^3 - t^2 - 12t + 4 = 0.$$

Vi gissar en rot och finner att $t = 2$ löser ekvationen. Polynomdivision av vänsterledet med $t - 2$ resulterar i att

$$\begin{aligned} 3t^3 - t^2 - 12t + 4 = (t-2)(3t^2 + 5t - 2) &= 3(t-2)\left(\left(t + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right) \\ &= 3(t-2)(t+2)\left(t - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Om $t = 2$ blir $x = 2^4 = 16$. Om $t = -2$ saknas lösning. Om $t = \frac{1}{3}$ blir $x = \frac{1}{81}$.

Svar: $x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln x\right)$ samt $x = 16$ eller $x = \frac{1}{81}$.

5. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\sqrt{6}\sin x = 2 + \sqrt{2}\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2.$$

Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(x+v)$ med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$\sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x = C\left(\sin x \cos v + \cos x \sin v\right) = C\sin(x+v).$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/2$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C \sin v &= -\sqrt{2}, \\ C \cos v &= \sqrt{6}. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 8.$$

Alltså är $C = \sqrt{8}$ ett lämpligt val, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin v &= \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $v = -\dfrac{\pi}{6}$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{8} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \text{eller} \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{11\pi}{12} + 2n\pi$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. (a) Vi ser direkt att $f(-x) = f(x)$, så då $D_f = \mathbf{R}$ kan funktionen inte vara injektiv. Till exempel är $f(-1) = f(1)$. Därför saknas f^{-1}. För g med $D_g =]-\infty, 0]$ gäller att (man kan även sätta $t = e^x$ för att se att det är en andragradsekvation)

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x + e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1.$$

Eftersom $y \in V_g$ måste $y^2 \geq 1$, ty annars skulle $y = g(x)$ sakna lösningar för ett givet $x \in D_g$, vilket vore absurt. Då det även är tydligt att $y = g(x) > 0$ så kommer alltså $y \geq 1$. Således gäller att

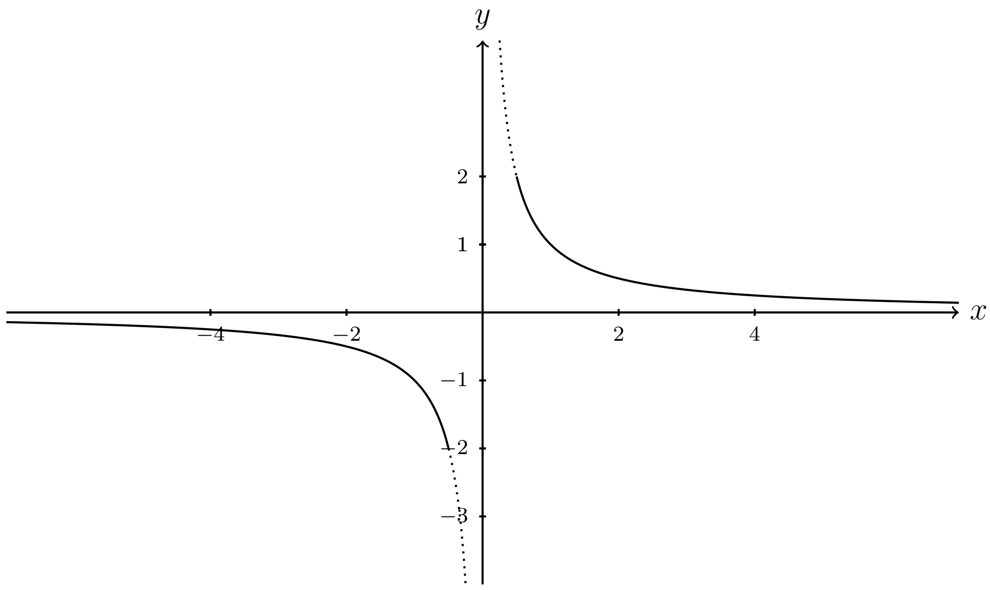
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

där endast $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ är aktuell eftersom $x \leq 0$ medför att $e^x \leq 1$ och $y \geq 1$ medför att $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$. Därmed har vi visat att

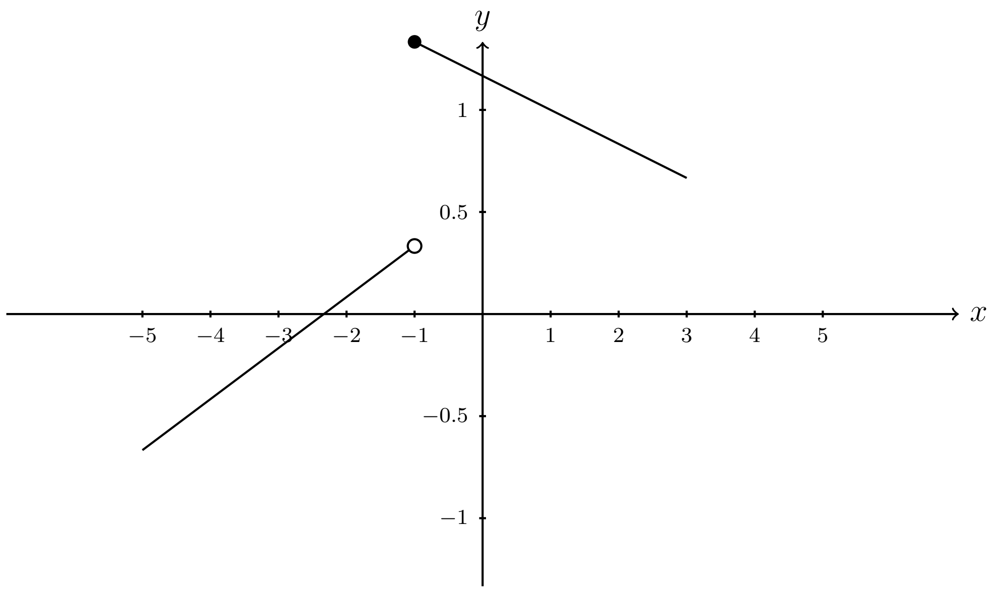
$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Vi finner alltså högst en lösning för varje y, vilket innebär att ett uttryck för inversen ges av $g^{-1}(y) = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

(b) Enklaste exemplet kanske är funktionen $n(x) = \dfrac{1}{x}$ med $D_n = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Figuren nedan visar utseendet.



Uppenbarligen gäller inte att om $x_1 < x_2$ med $x_1, x_2 \in D_n$ så är $n(x_1) > n(x_2)$ i fallet då $x_1 < 0$ och $x_2 > 0$. Men lokalt kring varje punkt $x \in D_n$ gäller så klart att n är strängt avtagande. Problemet uppstår i "punkteringen" av definitionsmängden där funktionen tillåts hoppa ordentligt. Fusk? Kan vi hitta exempel på ett sammanhängande intervall? Ett sätt att konstruera ett sådant exempel är att skarva ihop två funktioner — en växande och en avtagande — så det uppstår ett "hopp" som separerar graferna. Ta till exempel följande funktion med definitionsmängd $[-5, 3]$.

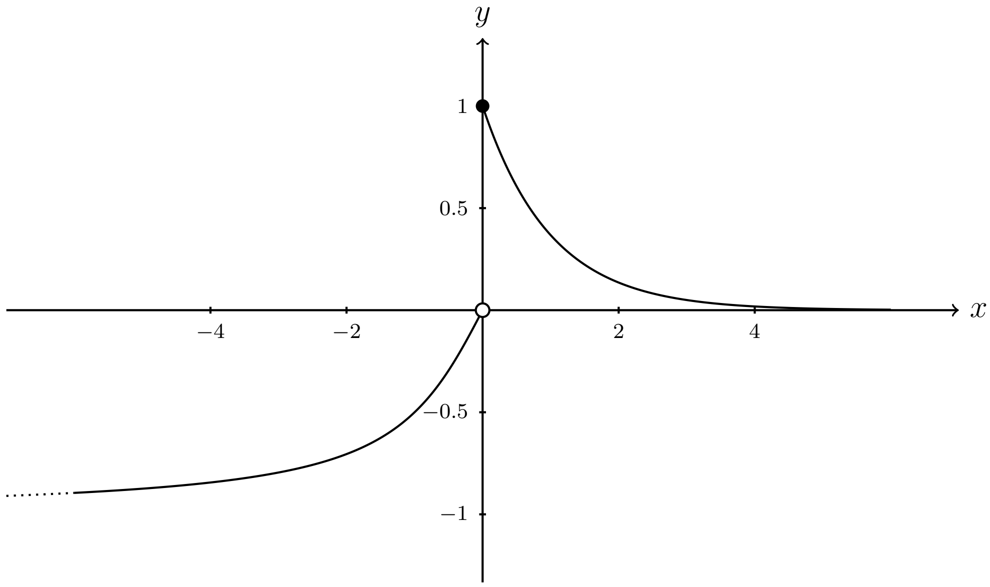


Det är tydligt att varje y-värde i värdemängden motsvarar precis ett x-värde i definitionsmängden, så funktionen är inverterbar. Däremot är den så klart varken strängt växande eller avtagande.

Kan vi konstruera ett exempel som är definierat på hela reella axeln? Absolut, med samma tanke som föregående konstruktion kan vi betrakta funktionen

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \arctan x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Faktorn $\dfrac{2}{\pi}$ har endast ett estetiskt syfte. Om vi ritar upp grafen till h ser den ut enligt följande:



Här är h varken strängt växande eller strängt avtagande på $\mathbf{R}$, men eftersom varje y-värde ger högst ett x-värde är funktionen inverterbar (vad blir h^{-1}?).

Nu kanske man kan tycka att h ändå i princip är monoton eftersom den är det på olika delintervall, så den går att dela upp i två delar där h är endera strängt avtagande eller strängt växande. Skulle den slutsatsen gälla generellt? Går det alltid att dela upp i mindre intervall där funktionen är strängt växande eller avtagande? Svaret är nej. Betrakta till exempel följande roliga funktion:

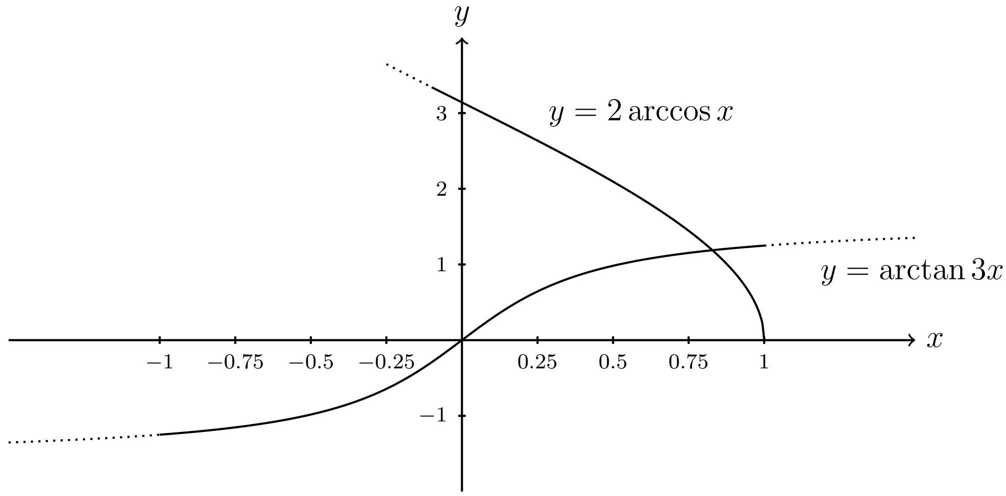
$$d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen d definieras alltså enligt $d(x) = x$ om x är rationell och $d(x) = 1-x$ om x är irrationell. På intervallet $]0, 1[$ är d uppenbarligen inverterbar ty $d^{-1}(x) = d(x)$, men det finns inget delintervall där d är växande eller avtagande. Att ge sig in på att rita upp funktionen blir dock problematiskt (varför?).

För er som läst envariabelanalysen: kan en *kontinuerlig* funktion definierad på ett intervall vara inverterbar utan att vara strängt växande eller avtagande på definitionsintervallet?

Svar: (a) $g^{-1}(y) = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2 - 1}\bigr)$ (b) Se ovan.

7. Vi börjar med att skissa hur vänster- och högerled ser ut.



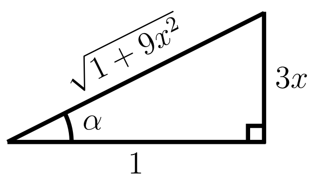
Det verkar alltså troligt att det finns precis en lösning. Eftersom $\arctan 3x$ är strängt växande och $2\arccos x$ är strängt avtagande kan det maximalt finnas en lösning till ekvationen. Vidare gäller att för $x < 0$ så är $\arctan 3x < 0$ och $2\arccos x > 0$ (om även $x \geq -1$), så den eventuella lösningen kan ej vara negativ. Mer noggrant kan vi se att om $-1 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ så gäller att

$$2\arccos x \geq 2\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} > \arctan 3x.$$

Det kan alltså inte finnas några lösningar om $x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Antag därför att $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$. Då gäller att $\alpha = \arctan 3x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ och $0 \leq \arccos x \leq \dfrac{\pi}{4}$, dvs $2\arccos x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Eftersom cosinus är injektiv på $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ är

$$2\arccos x = \arctan 3x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\arccos x) = \cos(\arctan 3x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 = \cos\alpha.$$

Då $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\tan\alpha = 3x$. Ifrån denna triangel kan vi se att $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+9x^2}}$.



Således gäller alltså att

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+9x^2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+9x^2}(2x^2-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (1+9x^2)(4x^4 - 4x^2 + 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2\big(36x^4 - 32x^2 + 5\big) = 0 \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i kvadreringen för att behålla ekvivalens. Eftersom $x > 0$ medför detta att

$$0 = x^4 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{5}{36} = \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)^2 - \frac{19}{324}.$$

Alltså måste

$$x^2 = \frac{4}{9} \pm \frac{\sqrt{19}}{18}.$$

Eftersom $\dfrac{1}{2} < x^2 \leq 1$ är det $x = \sqrt{\dfrac{8+\sqrt{19}}{18}} = \dfrac{\sqrt{8+\sqrt{19}}}{3\sqrt{2}}$ som är lösningen.

Svar: $x = \dfrac{\sqrt{8+\sqrt{19}}}{3\sqrt{2}}$.