Lösningsförslag TATA68 2018-08-21

1. (a) Vi sorterar termerna och faktoriserar:

$$\frac{x}{x-1} > \frac{x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x+1)-x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} > 0.$$

En teckentabell:

		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser i tabellen att uttrycket är positivt precis då $-1 < x < 0$ eller $x > 1$.

(b) Polynomdivisionen

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & \frac{1}{2}x & -\frac{1}{4} & \\
\hline
x^3 & & & -1 & \big|\ 2x^2+x+1 \\
-(x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
 & -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & -1 & \\
-(& -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x & -\frac{1}{4}) & \\
\hline
 & & -\frac{1}{4}x & -\frac{3}{4} &
\end{array}$$

visar att

$$\frac{x^3-1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}{2x^2+x+1}.$$

(c) Talet $x = \sqrt{a}$ (där $a \geq 0$) definieras som den icke-negativa lösningen till $x^2 = a$:

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a,\ x \geq 0.$$

Svar: (a) $-1 < x < 0$ eller $x > 1$ (b) $p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ och $q(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ (b) Se ovan.

2. (a) Genom att dela upp summan i två delar där $k \leq 0$ eller $k > 0$ och indexera om den negativa delen ser vi att de flesta termerna tar ut varandra parvis, så att

$$\sum_{k=-26}^{27} k^3 = \sum_{k=-26}^{0} k^3 + \sum_{k=1}^{27} k^3 = \sum_{k=0}^{26} (-k)^3 + \sum_{k=1}^{27} k^3 = -\sum_{k=0}^{26} k^3 + \sum_{k=1}^{27} k^3 = 27^3.$$

Den andra summan är geometrisk, så

$$\sum_{k=-26}^{27} 3^k = 3^{-26} \cdot \frac{3^{54}-1}{3-1} = \frac{3^{28}-3^{-26}}{2}.$$

(b) Vi förenklar enligt

$$\left|e^{2i}\left(2i+\frac{1}{1+i}\right)\right| = |e^{2i}|\left|\frac{2i(1+i)+1}{1+i}\right| = \frac{|2i-1|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Svar: (a) 27^3 respektive $\dfrac{3^{28}-3^{-26}}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

3. (a) Låt $t = 3^x$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 6\cdot 3^{3x-1}+5\cdot 9^x = 3^{x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,t^3+5\,t^2 = 3\,t \quad \Leftrightarrow \quad 2\,t^3+5\,t^2-3\,t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = t\left(t^2+\frac{5}{2}\,t-\frac{3}{2}\right) = t\left(\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+3)\,, \end{aligned}$$

så $t = 0,\ -3,\ \dfrac{1}{2}$ är nollställena. Endast

$$t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

ger en lösning, eftersom $t = 3^x > 0$ för alla reella x.

(b) För att ekvationen ska vara definierad måste $\ln x \geq 0$ och $x > 0$, så $x \geq 1$ är nödvändigt. Om $x \geq 1$ gäller att

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{1}{4}(\ln x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x\cdot\left(\frac{1}{4}\ln x - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \text{ eller } \ln x = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ eller } x = e^4, \end{aligned}$$

där första ekvivalensen följer av att $\dfrac{1}{2}\ln x \geq 0$ för $x \geq 1$.

Svar: (a) $x = -\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ (b) $x = 1$ eller $x = e^4$.

4. (a) Vi ser att

$$\sin^2 3x\,\cos 5x = \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)\cos 5x = \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos 6x\cdot\cos 5x.$$

En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \cos 6x\cdot\cos 5x &= \left(\frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i11x}+e^{ix}+e^{-ix}+e^{-i11x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 11x+\cos x\right), \end{aligned}$$

så

$$\sin^2 3x\,\cos 5x = \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{4}\left(\cos 11x+\cos x\right).$$

(b) Eftersom

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

med positivt tecken ty $0 \le \arccos t \le \pi$, så följer det att

$$\tan\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Man kan förstås använda Eulers formler direkt på ursprungsuttrycket också.

Svar: (a) $\frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{4}(\cos 11x + \cos x)$ (b) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

5. Vi söker de $z \in \mathbf{C}$ så att

$$z^7 = 7 - 7i.$$

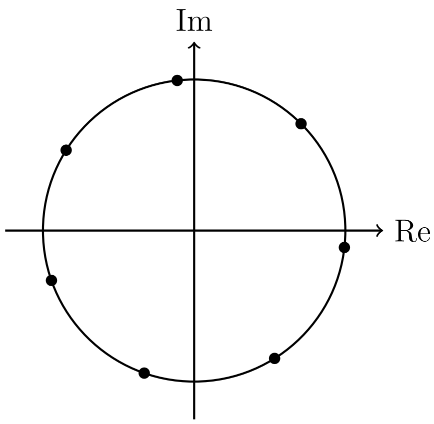
Det komplexa talet $7-7i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$7 - 7i = \sqrt{98}e^{-i\pi/4} = 7\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \ge 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^7 = r^7 e^{i7\varphi} = 7\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r^7 = 7\sqrt{2},\ r \ge 0, \\ 7\varphi = -\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = (7\sqrt{2})^{1/7}$ och $\varphi = -\frac{\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.



Våra lösningar blir nu

$$z = (7\sqrt{2})^{1/7}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)}, \quad n = 0,1,2,3,4,5,6.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 7$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (**??**) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = (7\sqrt{2})^{1/7}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)}$, $n = 0,1,2,3,4,5,6$.

6. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att $\arccos\frac{x-1}{x}$ ska vara definierad måste

$$-1 \le \frac{x-1}{x} \le 1.$$

Vidare måste

$$2\pi - 3\arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\pi}{3} \ge \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} \le \frac{x-1}{x}.$$

Således måste

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x-1}{x} \le 1$$

gälla. Vi ser direkt att

$$\frac{x-1}{x} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Den andra olikheten kan skrivas om enligt

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x-1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}\,x-1}{x} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\,x-2}{x} \ge 0$$

så vi ställer upp en teckentabell.

		0		$\frac{2}{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x-2}{x}$	$+$	☠	$-$	0	$+$

Alltså måste $x < 0$ eller $x \ge 2/3$. Men vi såg ovan att $x > 0$ är nödvändigt, så definitionsmängden D_f ges således av $x \ge \dfrac{2}{3}$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{2\pi - 3\arccos\left(\frac{x-1}{x}\right)} \;&\Rightarrow\; y^2 = 2\pi - 3\arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow\; \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2\pi - y^2}{3} \\ &\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{x} = \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right). \end{aligned}$$

Vi löser ut x ur den sista likheten och ser att

$$x = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right)}.$$

Vi finner högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right)}$.

Svar: $D_f = \left[\frac{2}{3},\, \infty\right[$ samt $f^{-1}(y) = \left(1 - \cos\left(\dfrac{2\pi - y^2}{3}\right)\right)^{-1}$.

7. Additionsformeln för tangens visar att

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right)\right) &= \frac{\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}}{1 - \frac{b+c}{a}\,\frac{a+c}{b}} = \frac{(b+c)b + (a+c)a}{ab - (b+c)(a+c)} \\ &= -\frac{a^2 + b^2 + bc + ac}{bc + ac + c^2} = -\frac{c^2 + bc + ac}{bc + ac + c^2} = -1, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $a^2 + b^2 = c^2$ eftersom talen är längderna på sidorna i en rätvinklig triangel. Vi vet att

$$\tan v = -1 \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

vilket innebär att

$$\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

för något tal $n \in \mathbf{Z}$. Då $a, b, c > 0$ är $(b+c)/a > 0$ och $(a+c)/b > 0$ vilket ger att

$$0 < \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

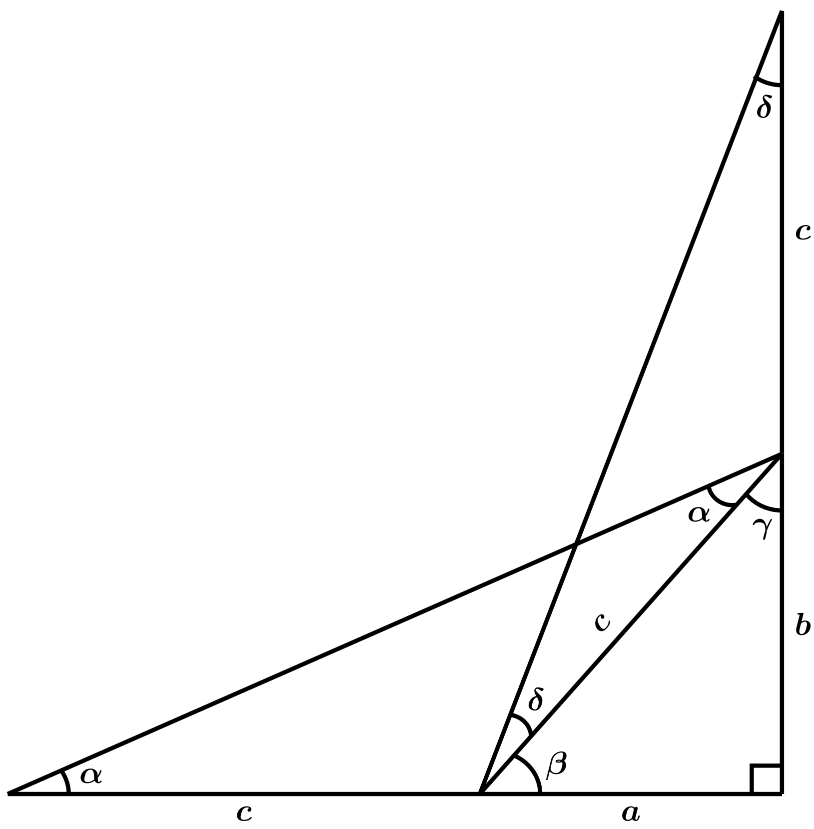
Adderar vi dessa olikheter fås

$$0 < \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) < \pi,$$

vilket gör att $n = 1$ är enda möjligheten. Alltså har vi visat att

$$\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Alternativ 2. Vi kan även finna detta resultat helt geometriskt. Betrakta figuren nedan där vi skapar två likbenta trianglar.



Det följer ur denna figur att

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + \pi - \beta = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \dfrac{\beta}{2}, \\ \delta + \delta + \pi - \gamma = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Vidare måste

$$\alpha + \gamma = \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) \quad \text{och} \quad \delta + \beta = \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right),$$

så

$$\arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) = \alpha + \delta + \gamma + \beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

ty $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Svar: $\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = \frac{3\pi}{4}$.