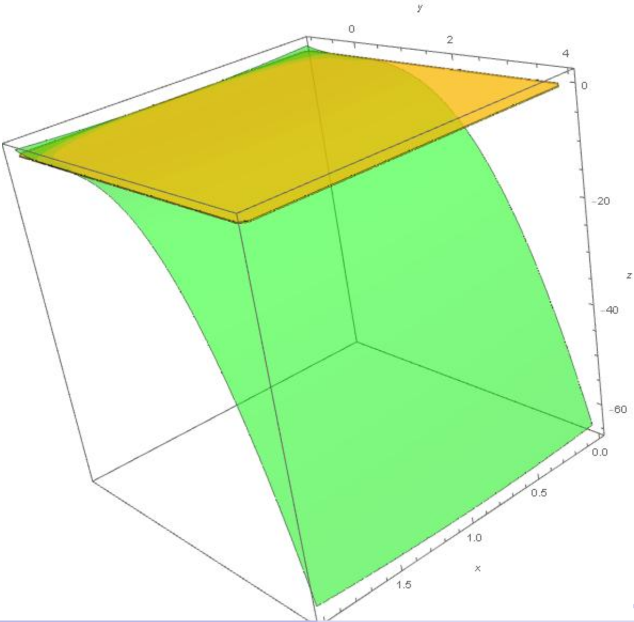
Exempel

Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$ då $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.

Plot



Lösning

$f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$, $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.

Lösning

$f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$, $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.
Mängden är en sluten och begränsad kvadrat, och f är kontinuerlig.

Lösning

$f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$, $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.
Mängden är en sluten och begränsad kvadrat, och f är kontinuerlig.
Inre stationära punkter:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, -3y^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0).$$

Lösning

$f(x,y) = x^2 - 2x - y^3$, $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.
Mängden är en sluten och begränsad kvadrat, och f är kontinuerlig.
Inre stationära punkter:

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, -3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

Punkten $(1,0)$ är en inre punkt till vårt område så det är en kandidat för ett globalt extremvärde, och värdet är

$$f(1,0) = -1.$$

Kandidaterna på randen

Randen består av linjerna

$$\begin{aligned} x = 0, &\quad -1 < y < 4, \\ x = 2, &\quad -1 < y < 4, \\ 0 < x < 2, &\quad y = -1 \\ 0 < x < 2, &\quad y = 4, \end{aligned}$$

samt fyra hörnpunkter

$$(0, -1), \quad (0, 4), \quad (2, -1), \quad (2, 4).$$

$x = 0, \ -1 < y < 4$

$$f(0, y) = -y^3.$$

$x = 0, \ -1 < y < 4$

$$f(0, y) = -y^3.$$

Vi ser här att $-y^3$ som funktion på intervallet $-1 < y < 4$ har en stationär punkt i $y = 0$ (notera att då detta är ett öppet intervall är enda kandidaterna för extremvärden punkter som är stationära för envariabelfunktionen vi nu studerar).

$$f(0, y) = -y^3.$$

Vi ser här att $-y^3$ som funktion på intervallet $-1 < y < 4$ har en stationär punkt i $y = 0$ (notera att då detta är ett öppet intervall är enda kandidaterna för extremvärden punkter som är stationära för envariabelfunktionen vi nu studerar).
Där är funktionsvärdet

$$f(0, 0) = 0.$$

$f(2, y) = -y^3$ så det ger på samma sätt som ovan en kandidat $(2, 0)$, och

$$f(2, 0) = 0.$$

$0 < x < 2,\ y = -1$

$$f(x, -1) = x^2 - 2x + 1.$$

$0 < x < 2,\ y = -1$

$$f(x, -1) = x^2 - 2x + 1.$$

Funktionen $x^2 - 2x + 1$ sedd som funktion på $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$, och

$$f(1, -1) = 0.$$

$0 < x < 2,\ y = 4$

$$f(x, 4) = x^2 - 2x - 64.$$

$0 < x < 2$, $y = 4$

$$f(x,4) = x^2 - 2x - 64.$$

Funktionen $x^2 - 2x - 64$ som funktion på intervallet $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$ och

$$f(1,4) = -65.$$

Hörnpunkterna

$f(0,-1) = -(-1)^3 = 1$, $f(0,4) = -(4)^3 = -64$, $f(2,-1) = 1$ och $f(2,4) = -64$.

Jämförelse av kandidaterna

Nu behöver vi bara bland alla dessa värden kolla vilket som var störst respektive minst.

Jämförelse av kandidaterna

Nu behöver vi bara bland alla dessa värden kolla vilket som var störst respektive minst.
Det största är 1, och antas i punkterna $(0, -1)$ och $(2, -1)$.

Jämförelse av kandidaterna

Nu behöver vi bara bland alla dessa värden kolla vilket som var störst respektive minst.
Det största är 1, och antas i punkterna $(0, -1)$ och $(2, -1)$.
Det minsta värdet är -65 och antas i $(1, 4)$.