Exempel

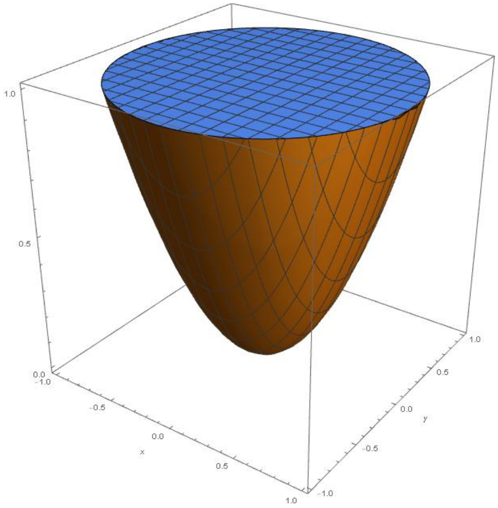
Hitta största och minsta värde till $f(x, y, z) = x^2 + yz$ då $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Lösning

Området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ är kompakt. Mer precist är det området som ligger mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$. Vi har vidare att $D^o = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z < 1\}$ och ∂D består av följande tre delar

$$
\begin{aligned}
&z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1, \\
&z = 1, x^2 + y^2 < 1, \\
&z = x^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Plot av området



Inre stationära punkter

$$f(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Inre stationära punkter

$$f(x, y, z) = x^2 + yz.$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, z, y) = (0, 0, 0).$$

Inre stationära punkter

$$f(x, y, z) = x^2 + yz.$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, z, y) = (0, 0, 0).$$

Detta har bara lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, vilket är en randpunkt, och alltså finns inga stationära inre punkter.

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$$\nabla g(x,y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0,0).$$

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$$\nabla g(x,y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0,0).$$

Den första koordinaten ger $2x + 2xy = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$.

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$$\nabla g(x, y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0, 0).$$

Den första koordinaten ger $2x + 2xy = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$.
Insatt i ekvationen för den andra koordinaten får vi $y = 0$ respektive $x^2 + 3 = 0$ som saknar (reell) lösning.

Kan parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2+y^2) = x^2+y(x^2+y^2) = x^2+x^2y+y^3, \quad x^2+y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$$\nabla g(x, y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0, 0).$$

Den första koordinaten ger $2x + 2xy = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$.
Insatt i ekvationen för den andra koordinaten får vi $y = 0$ respektive $x^2 + 3 = 0$ som saknar (reell) lösning.
Alltså har vi kandidaten $(0, 0)$ härifrån, vilket motsvarar punkten $(0, 0, 0^2 + 0^2) = (0, 0, 0)$ på ytan:

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

$z = 1,\ x^2 + y^2 < 1$

Kan återigen parametriseras med (x, y):

$$h(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

$z = 1$, $x^2 + y^2 < 1$

Kan återigen parametriseras med (x, y):

$$h(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Nu har vi $\nabla h(x, y) = (2x, 1) \neq (0, 0)$. Så det finns inga kandidater för extrempunkter här.

$z = x^2 + y^2 = 1$

$z = x^2 + y^2 = 1$

Kan parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel).

Kan parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel). Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

Kan parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel). Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

$k'(t) = -2\cos t \sin t + \cos t = \cos t(-2\sin t + 1) = 0$,vilket medför att antingen $\cos t = 0$ eller $\sin t = 1/2$.

Kan parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel).
Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

$k'(t) = -2\cos t \sin t + \cos t = \cos t(-2\sin t + 1) = 0$,vilket medför att antingen $\cos t = 0$ eller $\sin t = 1/2$.
Så enda lösningarna är $\cos t = 0$ och $\sin t = \pm 1$ samt $\sin t = 1/2$, $\cos t = \pm\sqrt{3}/2$

$z = x^2 + y^2 = 1$

Kan parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel).
Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

$k'(t) = -2\cos t \sin t + \cos t = \cos t(-2\sin t + 1) = 0$,vilket medför att antingen $\cos t = 0$ eller $\sin t = 1/2$.
Så enda lösningarna är $\cos t = 0$ och $\sin t = \pm 1$ samt $\sin t = 1/2$, $\cos t = \pm\sqrt{3}/2$
Detta svarar mot punkterna $(0, \pm 1, 1)$ samt $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$:

$$f(0,1,1) = 1, \quad f(0,-1,1) = -1,$$

$$f(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}, \quad f(\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}.$$

Vi ser alltså att bland alla våra kandidater för globala extrempunkter så har vi maximum $5/4$ i $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ och minimum -1 i $(0, -1, 1)$.