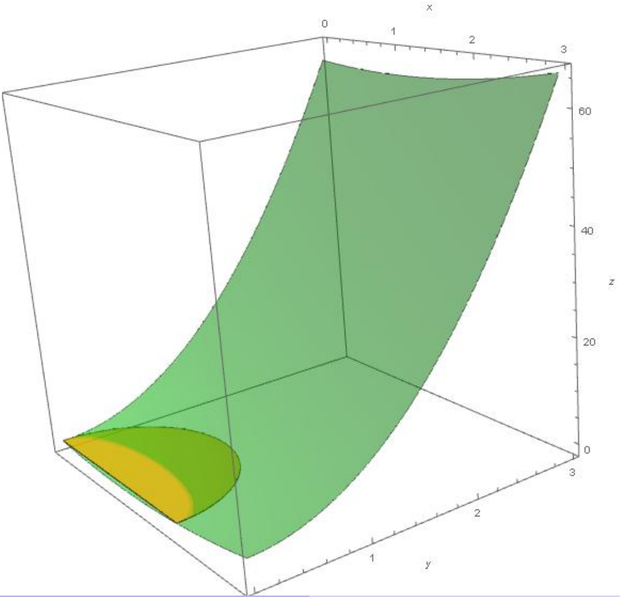
Exempel

Avgör om $f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x$ har några globala extremvärden i $x \geq 0$, $y \geq 0$, och ange i så fall vad dessa är.

Plot



Lösning

Vi noterar att

$$f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x = (x-1)^2 + 7y^2 - 1.$$

Lösning

Vi noterar att

$$f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x = (x-1)^2 + 7y^2 - 1.$$

Eftersom (t ex) $f(x, 1) = (x-1)^2 + 6 \to \infty$ då $x \to \infty$, och alla punkter $(x, 1)$ för $x \geq 0$ ligger i vårt område, så ser vi att det inte finns något globalt maximum.

Lösning

Vi noterar att

$$f(x,y) = x^2 + 7y^2 - 2x = (x-1)^2 + 7y^2 - 1.$$

Eftersom (t ex) $f(x,1) = (x-1)^2 + 6 \to \infty$ då $x \to \infty$, och alla punkter $(x,1)$ för $x \geq 0$ ligger i vårt område, så ser vi att det inte finns något globalt maximum.
Å andra sidan ser vi att $f(0,0) = 0$ och för alla (x,y) som uppfyller $(x-1)^2 + y^2 > 1$ gäller
$f(x,y) = (x-1)^2 + 7y^2 - 1 = (x-1)^2 + y^2 + 6y^2 - 1 > 0.$

Lösning

Vi noterar att

$$f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x = (x-1)^2 + 7y^2 - 1.$$

Eftersom (t ex) $f(x, 1) = (x-1)^2 + 6 \to \infty$ då $x \to \infty$, och alla punkter $(x, 1)$ för $x \geq 0$ ligger i vårt område, så ser vi att det inte finns något globalt maximum.
Å andra sidan ser vi att $f(0, 0) = 0$ och för alla (x, y) som uppfyller $(x-1)^2 + y^2 > 1$ gäller
$f(x, y) = (x-1)^2 + 7y^2 - 1 = (x-1)^2 + y^2 + 6y^2 - 1 > 0.$
Alltså måste f ha ett globalt minimum, och detta antas på mängden D som ges av de tre olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Minimum till f över D, inre stationära punkter

Stationära punkter ges av

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 14y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0).$$

Minimum till f över D, inre stationära punkter

Stationära punkter ges av

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, 14y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

Detta är en randpunkt, så det finns inga inre stationära punkter.

Minimum till f över D, randpunkter

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, \\
&0 < x < 2, y = 0, \\
&(0,0), \quad (2,0).
\end{aligned}
$$

Minimum till f över D, randpunkter

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,\\
&0 < x < 2, y = 0,\\
&(0,0), \quad (2,0).
\end{aligned}
$$

Cirkelbågen kan parametriseras som en graf $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 < x < 2$.

Minimum till f över D, randpunkter

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,\\
&0 < x < 2, y = 0,\\
&(0,0), \quad (2,0).
\end{aligned}
$$

Cirkelbågen kan parametriseras som en graf $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 < x < 2$.
Vi får då

$$f(x, \sqrt{1-(x-1)^2}) = (x-1)^2 + 7(\sqrt{1-(x-1)^2})^2 - 1 = 6 - 6(x-1)^2.$$

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,\\
&0 < x < 2, y = 0,\\
&(0,0), \quad (2,0).
\end{aligned}
$$

Cirkelbågen kan parametriseras som en graf $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 < x < 2$.
Vi får då

$$f(x, \sqrt{1-(x-1)^2}) = (x-1)^2 + 7(\sqrt{1-(x-1)^2})^2 - 1 = 6 - 6(x-1)^2.$$

Den enda stationära punkten för $6 - 6(x-1)^2$ (som funktion av en variabel) är 1, och detta ligger på intervallet $0 < x < 2$.

Minimum till f över D, randpunkter

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,$$
$$0 < x < 2, y = 0,$$
$$(0,0), \quad (2,0).$$

Cirkelbågen kan parametriseras som en graf $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 < x < 2$.
Vi får då

$$f(x, \sqrt{1-(x-1)^2}) = (x-1)^2 + 7(\sqrt{1-(x-1)^2})^2 - 1 = 6 - 6(x-1)^2.$$

Den enda stationära punkten för $6 - 6(x-1)^2$ (som funktion av en variabel) är 1, och detta ligger på intervallet $0 < x < 2$.
Detta motsvarar $(x, y) = (1, 1)$ och $f(1, 1) = 6$.

Minimum till f över D, randpunkter

På linjen får vi

$$f(x,0) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 2.$$

Minimum till f över D, randpunkter

På linjen får vi

$$f(x,0) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 2.$$

Här får vi en stationär punkt i 1 och $f(1,0) = -1$.

Minimum till f över D, randpunkter

Slutligen har vi värdena i hörnpunkterna: $f(0,0) = 0$ och $f(2,0) = 0$.

Minimum till f över D, randpunkter

Slutligen har vi värdena i hörnpunkterna: $f(0,0) = 0$ och $f(2,0) = 0$.

Svar: Funktionen f antar sitt minsta värde -1 över $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $(1,0)$. Största värde antas ej (funktionen är obegränsad).