Exempel

Bestäm största och minsta värde, om de antas, till $f(x, y) = x^2 + x^3 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$.

Lösning

$f(x, y) = x^2 + x^3 + y^2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$.

Lösning

$f(x,y) = x^2 + x^3 + y^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$.
Notera att mängden $g(x,y) = 4$ är en cirkel (med radie 2 och centrum i origo). Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde kommer antas.

Lösning

$f(x,y) = x^2 + x^3 + y^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$.
Notera att mängden $g(x,y) = 4$ är en cirkel (med radie 2 och centrum i origo). Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde kommer antas.
Vi har

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3x^2, 2y),$$

och

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Lösning

$f(x,y) = x^2 + x^3 + y^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$.
Notera att mängden $g(x,y) = 4$ är en cirkel (med radie 2 och centrum i origo). Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde kommer antas.
Vi har

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3x^2, 2y),$$

och

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Vi ser att $\nabla g \neq 0$ på $x^2 + y^2 = 4$.

Lösning

$f(x,y) = x^2 + x^3 + y^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$.
Notera att mängden $g(x,y) = 4$ är en cirkel (med radie 2 och centrum i origo). Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde kommer antas.
Vi har

$$\nabla f(x,y) = (2x + 3x^2, 2y),$$

och

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Vi ser att $\nabla g \neq 0$ på $x^2 + y^2 = 4$.
Enda möjligheten för max/min är att dessa antas i punkter (x,y) sådana att

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \text{ för något } \lambda.$$

Lösning

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 &= \lambda \cdot 2x \\ 2y &= \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 &= 4, \end{cases}$$

Lösning

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 & = \lambda \cdot 2x \\ 2y & = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 & = 4, \end{cases}$$

Vi ser här att enda möjligheten är $\lambda = 1$ och $2x + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$, eller $y = 0$.

Lösning

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 & = \lambda \cdot 2x \\ 2y & = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 & = 4, \end{cases}$$

Vi ser här att enda möjligheten är $\lambda = 1$ och
$2x + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$, eller $y = 0$.
Det första fallet leder till $y = \pm 2$ enligt tredje raden, och det andra till $x = \pm 2$ enligt tredje raden.

Lösning

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 & = \lambda \cdot 2x \\ 2y & = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 & = 4, \end{cases}$$

Vi ser här att enda möjligheten är $\lambda = 1$ och
$2x + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$, eller $y = 0$.
Det första fallet leder till $y = \pm 2$ enligt tredje raden, och det andra till $x = \pm 2$ enligt tredje raden.
Det vill säga vi har kandidaterna $(0, \pm 2)$ och $(\pm 2, 0)$:

$$f(0,2) = 4, \quad f(0,-2) = 4, \quad f(2,0) = 12, \quad f(-2,0) = -4.$$

Lösning

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 & = \lambda \cdot 2x \\ 2y & = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 & = 4, \end{cases}$$

Vi ser här att enda möjligheten är $\lambda = 1$ och
$2x + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$, eller $y = 0$.
Det första fallet leder till $y = \pm 2$ enligt tredje raden, och det andra till $x = \pm 2$ enligt tredje raden.
Det vill säga vi har kandidaterna $(0, \pm 2)$ och $(\pm 2, 0)$:

$$f(0,2) = 4, \quad f(0,-2) = 4, \quad f(2,0) = 12, \quad f(-2,0) = -4.$$

Det största värdet som $f(x, y)$ antar på mängden $g(x, y) = 4$ är således 12 som antas i punkten $(2, 0)$ och det minsta -4 som antas i $(-2, 0)$.

Plot