Exempel

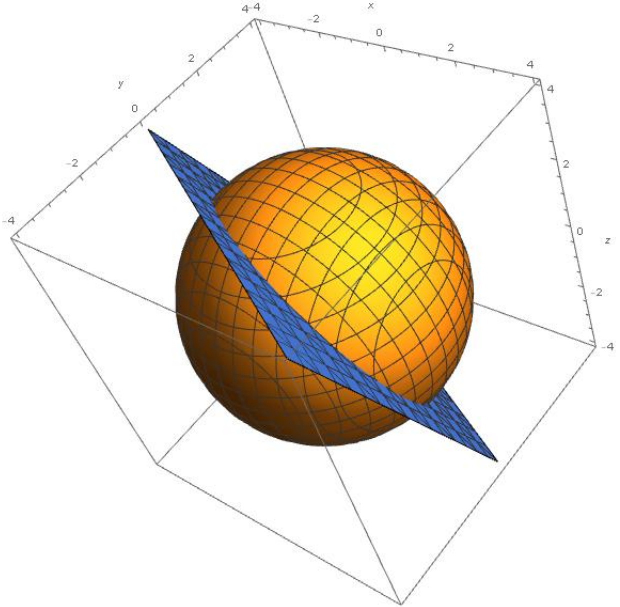
Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$ på den mängd där $x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $x + 2y + z \geq 0$.

Lösning

Bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $h(x, y, z) = x + 2y + z \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av ett slutet klot – i själva verket ett slutet halvklot – och alltså en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde.

Bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $h(x, y, z) = x + 2y + z \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av ett slutet klot – i själva verket ett slutet halvklot – och alltså en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde.
Vi har $\nabla f = (2x - 2, 2y - 2, 2z - 2)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (1, 2, 1)$.

Plot av området



dim 3-kandidater ($g < 12,\ h > 0$)

$\nabla f(x,y,z) = (2x-2, 2y-2, 2z-2) = 0$ ger kandidaten $f(1,1,1) = -3$.

dim 2-kandidater, består av två delar

- ($g = 12, h > 0$): $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow x = y = z$, som insatt i $g = 12$ ger kandidaten $f(2,2,2) = 0$. (Punkten $(-2,-2,-2)$ ligger utanför mängden.)
- ($g < 12, h = 0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 2 = 2z - 2$, alltså $y = 2x - 1, z = x$, som insatt i $h = 0$ ger kandidaten $f(1/3, -1/3, 1/3) = -1/3$.

dim 1-kandidater ($g = 12, h = 0$)

$\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ $z = x$, som insatt i $g = 12$ och $h = 0$ ger kandidaterna $f(2, -2, 2) = 8$ och $f(-2, 2, -2) = 16$.

Svar

Eftersom det inte finns några dim 0-kandidater har vi hittat alla potentiella extrempunkter ovan och kan vi jämföra våra värden.

Svar

Eftersom det inte finns några dim 0-kandidater har vi hittat alla potentiella extrempunkter ovan och kan vi jämföra våra värden.

Svar: $f_{\max} = f(-2, 2, -2) = 16$ och $f_{\min} = f(1, 1, 1) = -3$.