Optimering, introduktion

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Optimeringsfrågan

Optimering handlar om att givet en reellvärd funktion f definierad på en delmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ försöka besvara följande frågor:

(1) Avgör om f antar ett största (eller minsta) värde på D.

(2) Givet att ett största (eller minsta) värde antas, bestäm i så fall detta, samt i vilka punkter det antas.

Optimeringsfrågan

Optimering handlar om att givet en reellvärd funktion f definierad på en delmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ försöka besvara följande frågor:

(1) Avgör om f antar ett största (eller minsta) värde på D.

(2) Givet att ett största (eller minsta) värde antas, bestäm i så fall detta, samt i vilka punkter det antas.

- Funktionen f som ska ”optimeras” kallas ibland **målfunktion**.

Optimeringsfrågan

Optimering handlar om att givet en reellvärd funktion f definierad på en delmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ försöka besvara följande frågor:

(1) Avgör om f antar ett största (eller minsta) värde på D.

(2) Givet att ett största (eller minsta) värde antas, bestäm i så fall detta, samt i vilka punkter det antas.

- Funktionen f som ska "optimeras" kallas ibland **målfunktion**.
- Villkoret att $\bar{x}$ ska ligga i D kallas ibland en **begränsning** (eller ett **bivillkor**).

Extrempunkter

Definition (Lokala extrempunkter)

Vi säger att $f : D \to \mathbb{R}$ har ett lokalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D \cap B(\bar{a}, \varepsilon).$$

Med omvänd olikhet definieras lokala minimum över D.

Extrempunkter

Definition (Lokala extrempunkter)

Vi säger att $f : D \to \mathbb{R}$ har ett lokalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D \cap B(\bar{a}, \varepsilon).$$

Med omvänd olikhet definieras lokala minimum över D.

Definition (Globala extrempunkter)

Vi säger att $f : D \to \mathbb{R}$ har ett globalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D.$$

Med omvänd olikhet definieras globala minimum över D.

Kandidater för extrempunkter

Kandidater för extrempunkter

Vi kan, om D antas vara sluten, alltid dela upp $D = D^o \cup \partial D$ där D^o är de inre punkterna till D och ∂D randpunkterna.

Kandidater för extrempunkter

Vi kan, om D antas vara sluten, alltid dela upp $D = D^o \cup \partial D$ där D^o är de inre punkterna till D och ∂D randpunkterna.
Vi har då följande kandidater för extrempunkter till f över D:

(a) Stationära punkter $\bar{a} \in D^o$ (dvs där $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$),

(b) Singulära punkter $\bar{a} \in D^o$ (dvs där ∇f inte existerar),

(c) Lokala extrempunkter för f över ∂D.

Exempel

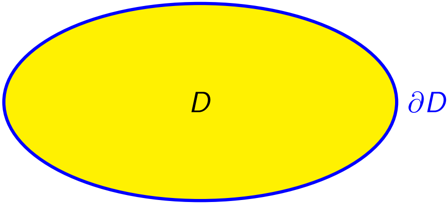
Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ över området

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

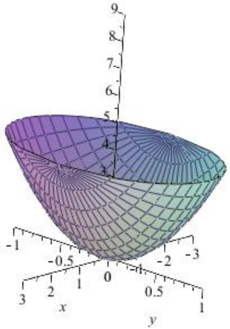
Exempel

Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ över området

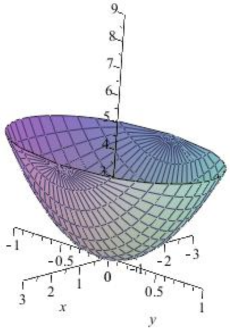
$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$



Exempel



Exempel



Vi kan här direkt se från grafen att vi har ett globalt minimum $0 = f(0, 0)$ i origo, som är en inre punkt till D, och ett globalt maximum $4 = f(a, b)$ i alla punkter (a, b) på ∂D.

Lösningsskiss till exemplet

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Lösningsskiss till exemplet

$f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$
Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x, y) = (2x, 8y) = (0, 0)$ är $(x, y) = (0, 0)$, som är en inre punkt till D, är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0, 0) = 0$.

Lösningskiss till exemplet

$f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.
Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x, y) = (2x, 8y) = (0, 0)$ är $(x, y) = (0, 0)$, som är en inre punkt till D, är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0, 0) = 0$.
Randen kan parametriseras via $(x, y) = (2\cos t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. Om vi nu inför

$$g(t) = f(2\cos t, \sin t)$$

har vi reducerat problemet med att hitta största och minsta värdet av f på ∂D till att hitta största och minsta värdet av g på $[0, 2\pi]$.

Lösningskiss till exemplet

$f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$
Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x, y) = (2x, 8y) = (0, 0)$ är $(x, y) = (0, 0)$, som är en inre punkt till D, är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0, 0) = 0$.
Randen kan parametriseras via $(x, y) = (2\cos t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. Om vi nu inför

$$g(t) = f(2\cos t, \sin t)$$

har vi reducerat problemet med att hitta största och minsta värdet av f på ∂D till att hitta största och minsta värdet av g på $[0, 2\pi]$.
I detta fall gäller

$$g(t) = (2\cos t)^2 + 4(\sin t)^2 = 4.$$

Lösningsskiss till exemplet

$f(x,y) = x^2 + 4y^2, \quad D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$
Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x,y) = (2x, 8y) = (0,0)$ är $(x,y) = (0,0)$, som är en inre punkt till D, är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0,0) = 0$.
Randen kan parametriseras via $(x,y) = (2\cos t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. Om vi nu inför

$$g(t) = f(2\cos t, \sin t)$$

har vi reducerat problemet med att hitta största och minsta värdet av f på ∂D till att hitta största och minsta värdet av g på $[0, 2\pi]$. I detta fall gäller

$$g(t) = (2\cos t)^2 + 4(\sin t)^2 = 4.$$

Det vill säga vi måste ha att $f(0,0) = 0$ är ett globalt minimum, och $f(x,y) = 4$ för alla (x,y) som uppfyller $x^2 + 4y^2 = 4$ är globala maximum till f.

Tre olika områden i optimering

- Optimering på kompakta (slutna och begränsade) områden.
- Optimering på obegränsade områden.
- Optimering med bivillkor.