Flervariabelanalys: Optimering

Tomas Sjödin och Vladimir Tkatjev

3 april 2020

Innehåll

1 Introduktion

Optimering handlar om att givet en reellvärd funktion f definierad på en delmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ försöka besvara följande frågor:

(1) Avgör om f antar ett största (eller minsta) värde på D.

(2) Givet att ett största (eller minsta) värde antas, bestäm i så fall detta, samt i vilka punkter det antas.

- Funktionen f som ska "optimeras" kallas ibland **målfunktion**.
- Villkoret att $\bar{x}$ ska ligga i D kallas ibland en **begränsning**, eller ett **bivillkor**.

När det gäller den andra punkten ovan kommer vi normalt dock när vi säger bivillkor typiskt mena att D ges på ett speciellt sätt, som beskrivs i sektion 4 nedan.

Vi studerade i *kapitel 6 i Flervariabelanalys: Teori* lokala inre extrempunkter, och nu ska vi införa lokala och globala extrempunkter, även för punkter som eventuellt inte är inre punkter till mängden vi studerar.

Definition 1.1 (Lokala extrempunkter). Vi säger att $f : D \to \mathbb{R}$ har ett lokalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D \cap B(\bar{a}, \varepsilon).$$

Med omvänd olikhet definieras lokala minimum över D.

Definition 1.2 (Globala extrempunkter). Vi säger att $f : D \to \mathbb{R}$ har ett globalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D.$$

Med omvänd olikhet definieras globala minimum över D.

Angående terminologin har vi ovan valt formuleringen ”över” D. En annan ekvivalent formulering vi kommer använda är ”extrempunkt till $f(\bar{x})$ då $\bar{x} \in D$”, vilket betyder samma sak.

Givetvis är en global extrempunkt över D också en lokal extrempunkt över D. I optimeringsproblemet är vi alltså främst intresserade av att hitta globala extrempunkter. Vad vi använder de lokala till är att det går att få fram nödvändiga villkor som kan kontrolleras som gäller i lokala extrempunkter (givetvis gäller dessa också då i globala extrempunkter, men de är mer naturliga att formulera för lokala extrempunkter). Till exempel vet vi att om $\bar{a}$ är en inre punkt till D där f är differentierbar, då måste det vara en stationär punkt, det vill säga $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

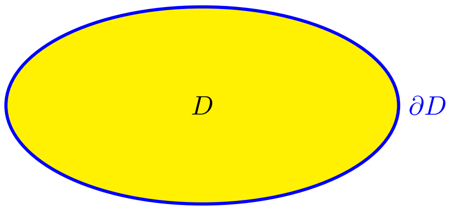
Som ett exempel i en variabel kan vi säga att $f(x) = x^2$ har lokala maximum över $[-1, 3]$ i både -1 och 3, men bara i den senare har vi ett globalt maximum. Notera vidare att mängden D är väldigt central i dessa problem. Till exempel om vi byter ut $[-1, 3]$ ovan mot $[-2, 4]$ så ändras förstås maxvärdet. Notera också att varken -1 eller 3 längre är lokala extrempunkter till f över $[-2, 4]$.

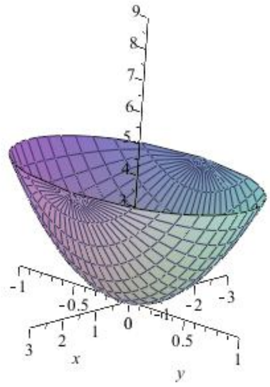
Det är också värt att poängtera att optimeringsproblemet oftast kommer formuleras som ”Bestäm största och minsta värdet av $f(\bar{x})$ för $\bar{x}$ i D” (det är då underförstått att vi också vill veta var dessa antas). Detta betyder i så fall samma sak som ”Bestäm alla globala extrempunkter till f över D och funktionsvärdet i dessa”.

Frågorna (1) och (2) ovan kan alltså formuleras som: Finns det globala extrempunkter till f över D, och bestäm i så fall dessa samt motsvarande funktionsvärden. Det kan mycket väl finnas mer än en punkt där ett globalt maximum/minimum antas. Om till exempel f är konstant är alla punkter $\bar{a} \in D$ både globala maximum och globala minimum till f.

Exempel 1.3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ över området

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$





Vi kan här direkt se från grafen att vi har ett globalt minimum $0 = f(0,0)$ i origo, som är en inre punkt till D, och ett globalt maximum $4 = f(a,b)$ i alla punkter (a,b) på ∂D.

I allmänhet kan man inte säga särskilt mycket utan extra antaganden på f och D. Typiskt kommer vi anta att f är kontinuerlig och D är sluten.
Vi kan, om D antas vara sluten, alltid dela upp $D = D^o \cup \partial D$ där D^o är de inre punkterna till D och ∂D randpunkterna. (Notera att vi inte utesluter att D^o är tom, till exempel om D är en kurva i två eller fler dimensioner. Randen ∂D är bara tom om $D = \mathbb{R}^n$, vilket vi inte heller utesluter.)

Det finns nu tre olika möjligheter för en extrempunkt $\bar{a}$ till f över D:

(1) $\bar{a} \in D^o$, f är differentierbar i $\bar{a}$ och $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$,

(2) $\bar{a} \in D^o$, f är ej differentierbar i $\bar{a}$,

(3) $\bar{a} \in \partial D$.

Notera speciellt att om vi antar att f är differentierbar på D^o, vilket vi normalt kommer göra, så är det andra fallet uteslutet.

Vi har nu alltså följande kandidater för extrempunkter till f över D:

(a) Stationära punkter $\bar{a} \in D^o$ (dvs där $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$),

(b) Singulära punkter $\bar{a} \in D^o$ (dvs där ∇f inte existerar),

(c) Lokala extrempunkter för f över ∂D.

Vi kommer som sagt inte fokusera så mycket på fall där (b) är aktuellt. Så problemet kommer bestå i att dels bestämma alla stationära inre punkter och kontrollera funktionsvärdena där, samt undersöka randen (i de fall där det saknas inre punkter blir det endast det senare). Slutligen om D inte är kompakt (dvs inte är sluten och begränsad) måste man kontrollera hur funktionen beter sig nära oändligheten.

När det gäller undersökningen av randpunkterna blir det första steget att först (eventuellt) dela upp randen i bitar som man sedan behandlar var och en för sig. Denna behandling kommer vi ha två alternativ för. Det första alternativet, som vi kommer använda i sektion 2 och 3, är via en lämplig parametrisering, vilket då reducerar problemet för dessa till ett i färre dimensioner. Det andra alternativt är att använda metoden som diskuteras under sektion 4 där vi behandlar optimering med bivillkor (närmare bestämt, en speciell typ av bivillkor där D lokalt är ett snitt mellan nivåytor). Bortsett från den sistnämnda sektionen är det metoder och inte teori, så de två första kommer bara bestå av exempel i princip.

2 Optimering på kompakta områden

I denna sektion antar vi att $f : D \to \mathbb{R}$ där f är kontinuerlig och D är kompakt (det vill säga sluten och begränsad).

Notera att under dessa omständigheter vet vi att f antar sitt största och minsta värde på D, så frågan blir inte om globala extrempunkter existerar, utan var och vad värdet av f är i dessa.

Vi kan börja med det enkla exemplet som vi redan insett svaret på i exempel 1.3 ovan.

Exempel 2.1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ över området $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Lösning: Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x,y) = (2x, 8y) = (0,0)$ är $(x,y) = (0,0)$, som är en inre punkt till D, är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0,0) = 0$.

Randen kan parametriseras via $(x,y) = (2\cos t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. Om vi nu inför

$$g(t) = f(2\cos t, \sin t)$$

har vi reducerat problemet med att hitta största och minsta värdet av f på ∂D till att hitta största och minsta värdet av g på $[0, 2\pi]$.

Notera alltså att f har ett lokalt maximum/minimum över ∂D i $(x,y) = (2\cos t, \sin t)$ om och endast om $g(t)$ har det över $[0, 2\pi]$ i t.

I detta fall gäller

$$g(t) = (2\cos t)^2 + 4(\sin t)^2 = 4.$$

Det vill säga vi måste ha att $f(0,0) = 0$ är ett globalt minimum, och $f(x,y) = 4$ för alla (x,y) som uppfyller $x^2 + 4y^2 = 4$ är globala maximum till f.

Ovan var det förstås helt onödigt att införa g då det är självklart att f är konstant på ∂D, men det illustrerar den allmänna metoden vi använder i denna sektion: Hitta alla lokala stationära inre punkter, som är kandidater till globala extrempunkter, samt parametrisera upp randen vilket reducerar problemet för denna till lägre dimension.

Exempel 2.2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2 - 2x - y^3$ då $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.

Lösning: Mängden är en kvadrat. Vi börjar med att leta efter inre stationära punkter.

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2, -3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

Punkten $(1,0)$ är en inre punkt till vårt område så det är en kandidat för ett globalt extremvärde, och värdet är

$$f(1,0) = -1.$$

De andra kandidaterna ligger på randen.
Randen består av fyra linjer och fyra hörnpunkter:

$$\begin{aligned}
&x = 0, \quad -1 < y < 4, \quad \text{(1D, linje)},\\
&x = 2, \quad -1 < y < 4, \quad \text{(1D, linje)},\\
&0 < x < 2, \quad y = -1 \quad \text{(1D, linje)},\\
&0 < x < 2, \quad y = 4, \quad \text{(1D, linje)},\\
&(0,-1), \quad (0,4), \quad (2,-1), \quad (2,4), \quad \text{(0D, punkter)}.
\end{aligned}$$

I fall som detta är det naturligt att behandla hörnen för sig. Om vi tar slutna intervall som t ex $-1 \leq y \leq 4$, så skulle vi annars behandla dessa hörnpunkter två gånger. Notera också att vi inom parentes skrivit $1D$ till exempel på linjerna. Man kan säga att det vi gör i den här typen av problem är att dela in mängden på ett naturligt sätt i bitar med olika "dimensioner", där vi i detta fall, då vi är i planet, har att mängden av inre punkter naturligt ses som 2-dimensionell, medan randen delas in i linjerna (kurvor) som naturligt ses som 1-dimensionella objekt (kan parametriseras med en reell parameter) samt hörnpunkterna som är 0-dimensionella.

Vi kollar nu linjerna för sig, samt värdena i hörnen. På $x = 0$, $-1 < y < 4$ har vi

$$f(0, y) = -y^3.$$

Vi ser här att $-y^3$ som funktion på intervallet $-1 < y < 4$ har en stationär punkt i $y = 0$ (notera att då detta är ett öppet intervall är enda kandidaterna för extremvärden punkter som är stationära för envariabelfunktionen vi nu studerar). Där är funktionsvärdet

$$f(0, 0) = 0.$$

På $x = 2$, $-1 < y < 4$ gäller också $f(2, y) = -y^3$ så det ger på samma sätt som ovan en kandidat $(2, 0)$, och

$$f(2, 0) = 0.$$

På $0 < x < 2$, $y = -1$ har vi

$$f(x, -1) = x^2 - 2x + 1.$$

Funktionen $x^2 - 2x + 1$ sedd som funktion på $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$, och

$$f(1, -1) = 0.$$

På $0 < x < 2$, $y = 4$ har vi slutligen

$$f(x, 4) = x^2 - 2x - 64.$$

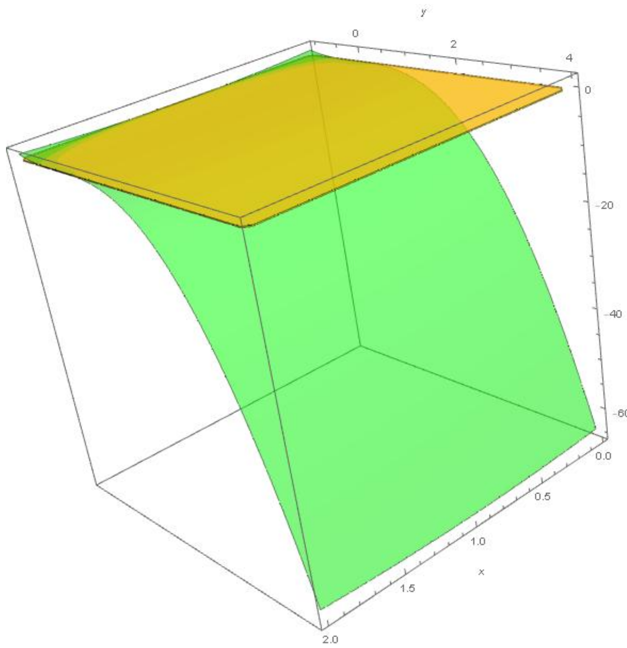
Funktionen $x^2 - 2x - 64$ som funktion på intervallet $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$ och

$$f(1, 4) = -65.$$

Värdena i hörnpunkterna är $f(0, -1) = -(-1)^3 = 1$, $f(0, 4) = -4^3 = -64$, $f(2, -1) = 1$ och $f(2, 4) = -64$.

Nu behöver vi bara bland alla dessa värden kolla vilket som var störst respektive minst. Det största är 1, och antas i punkterna $(0, -1)$ och $(2, -1)$. Det minsta värdet är -65 och antas i $(1, 4)$.

Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 4$ och den gröna grafen till $f(x, y)$ över detta område.

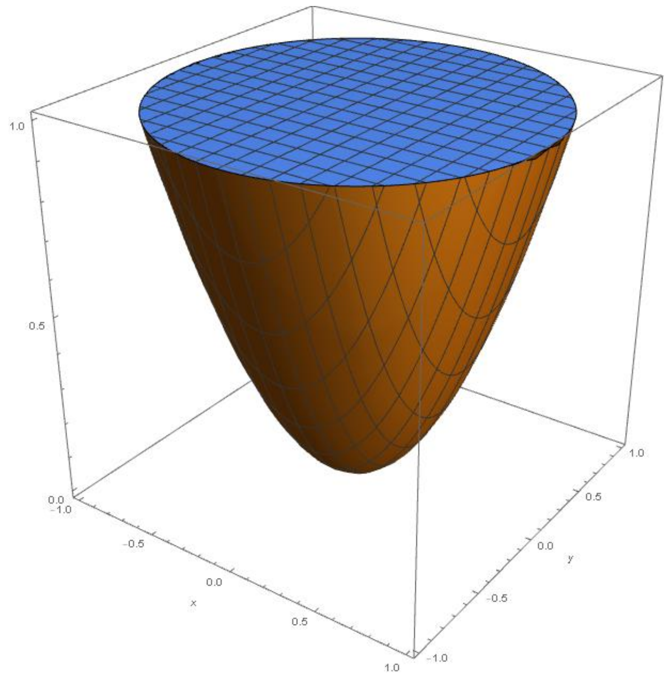


Exempel 2.3. Hitta största och minsta värde till $f(x, y, z) = x^2 + yz$ då $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Lösning: Området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ är kompakt. Mer precist är det området som ligger mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$. Vi har vidare att $D^o = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z < 1\}$ och ∂D består av följande tre delar

$$\begin{aligned}
&z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1, \quad \text{(2D, yta)},\\
&z = 1, x^2 + y^2 < 1, \quad \text{(2D, yta)},\\
&z = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(1D, kurva)}.
\end{aligned}$$

Det vill säga en del av en paraboloid, en cirkelskiva vid $z = 1$ och en cirkel där detta plan och paraboloiden skär varandra.



Vi börjar nu leta efter inre stationära punkter.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, z, y) = (0, 0, 0).$$

Detta har bara lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, vilket är en randpunkt, och alltså finns inga stationära inre punkter.

Ytan $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$ kan nu alltså parametriseras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2 + y^2) = x^2 + y(x^2 + y^2) = x^2 + x^2y + y^3, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g.

$$\nabla g(x, y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0, 0).$$

Den första koordinaten ger $2x + 2xy = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$. Insatt i ekvationen för den andra koordinaten får vi $y = 0$ respektive $x^2 + 3 = 0$ som saknar (reell) lösning. Alltså har vi kandidaten $(0, 0)$ härifrån, vilket motsvarar punkten $(0, 0, 0^2 + 0^2) = (0, 0, 0)$ på ytan:

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

Cirkelskivan $z = 1$, $x^2 + y^2 < 1$ kan återigen parametriseras med (x, y):

$$h(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Nu har vi $\nabla h(x,y) = (2x,1) \neq (0,0)$. Så det finns inga kandidater för extrempunkter här.

Cirkeln $z = x^2 + y^2 = 1$ kan slutligen parametriseras av $(\cos t, \sin t, 1)$ (vi kan till exempel ta $-\pi \leq t \leq \pi$, men då dessa punkter ligger på cirkeln för alla $t \in \mathbb{R}$ behöver vi inte göra det, utan kan bara leta efter stationära punkter t till $k(t)$ nedan). Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

Här får vi $k'(t) = -2\cos t \sin t + \cos t = \cos t(-2\sin t + 1) = 0$,vilket medför att antingen $\cos t = 0$ eller $\sin t = 1/2$. Så enda lösningarna är $\cos t = 0$ och $\sin t = \pm 1$ samt $\sin t = 1/2$, $\cos t = \pm\sqrt{3}/2$ (givetvis kan vi här i detta fall lösa ut $t = \pm\pi/2$ osv, men det är värdena av sinus och cosinus som kommer in i beräkningen av f, så värdena på t själv har vi inget behov av). Detta svarar mot punkterna $(0, \pm 1, 1)$ samt $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$:

$$f(0,1,1) = 1, \quad f(0,-1,1) = -1, \quad f(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}, \quad f(\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}.$$

Vi ser alltså att bland alla våra kandidater för globala extrempunkter så har vi maximum $5/4$ i $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ och minimum -1 i $(0,-1,1)$.

Exempel 2.4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x - y + yx$ då $x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

Lösning: De två bivillkoren $g(x,y) = x^2+y^2 \leq 4$ och $h(x,y) = x \geq 0$ bestämmer en sluten halvcirkelskiva – alltså en kompakt mängd E – och målfunktionen $f(x,y) = x-y+xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd. *Kandidatjakt*:

- *Stationära punkter*: $\nabla f = (1+y, x-1) = 0$, alltså $x = 1$ och $y = -1$. Eftersom $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (1,-1)$ är en inre punkt av E. Kandidat: $f(1,-1) = 1$.

- *Kandidater på sträckan* $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \end{cases}$ där $-2 \leq t \leq 2$: $f(x,y) = -t =: g(t)$, $g'(t) = -1 \neq 0$. Kandidater finns bara i hörnpunkterna ($t = \pm 2$): $f(0,-2) = 2$ och $f(0,2) = -2$.

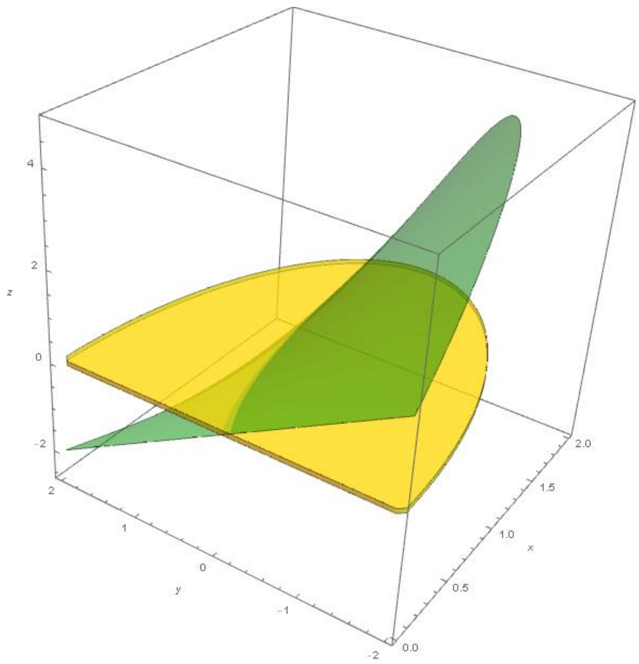
- *Kandidat på cirkelbågen.* Parametriseringen $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ger $f(2\cos t, 2\sin t) = 2(\cos t - \sin t) + 4\sin t\cos t =: h(t)$. Stationära punkter:

  $$h'(t) = -2(\sin t + \cos t) - 4(\sin^2 t - \cos^2 t) = -2(\sin t + \cos t)(2\sin t - 2\cos t + 1).$$

  a) Om $\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \tan t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ den enda lösningen in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kandidat: $f(2\cos\frac{\pi}{4}, -2\sin\frac{\pi}{4}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$
  b) Om $\sin t - \cos t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(t - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Den enda lösningen in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är $t = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$ vilket ger $\cos t = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ och $\sin t = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, d.v.s. kandidaten $(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{4})$ med värde i denna punkt: $\frac{5}{2}$.

- *Kandidater i hörnpunkterna*: $f(0,-2) = 2$ och $f(0,2) = -2$.

Svar: $f_{max} = f(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{4}) = \frac{5}{2}$ och $f_{min} = f(0,2) = -2$
Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område och den gröna grafen till $f(x,y)$ över detta område.



3 Optimering på ickekompakta områden

I denna sektion antar vi att $f : D \to \mathbb{R}$ där f är kontinuerlig och D är sluten men obegränsad. Vi kan nu inte längre veta att f har något globalt maximum eller minimum. Problemet blir här att försöka återföra problemet på fallet ovan genom att få kontroll på hur f beter sig nära oändligheten.

Exempel 3.1. Avgör om $f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x$ har några globala extremvärden i $x \geq 0$, $y \geq 0$, och ange i så fall vad dessa är.

Lösning:

Vi noterar att

$$f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 2x = (x-1)^2 + 7y^2 - 1.$$

Eftersom (t ex) $f(x, 1) = (x-1)^2 + 6 \to \infty$ då $x \to \infty$, och alla punkter $(x, 1)$ för $x \geq 0$ ligger i vårt område, så ser vi att det inte finns något globalt maximum.

Å andra sidan ser vi att $f(0, 0) = 0$ och för alla (x, y) som uppfyller $(x-1)^2 + y^2 > 1$ gäller $f(x, y) = (x-1)^2 + 7y^2 - 1 = (x-1)^2 + y^2 + 6y^2 - 1 > 0$. Alltså måste f ha ett globalt minimum, och detta antas på mängden D som ges av de tre olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Denna mängd är kompakt – mer precist en halvcirkelskiva – så vi kan nu behandla det med de metoder vi har från föregående sektion.

Stationära punkter ges av

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 14y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0).$$

Detta är en randpunkt, så det finns inga inre stationära punkter.

Randen ∂D kan delas in i en halvcirkelbåge, en linje och två hörnpunkter:

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,\\
&0 < x < 2, y = 0,\\
&(0, 0), \quad (2, 0).
\end{aligned}$$

Cirkelbågen kan parametriseras som en graf $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$, $0 < x < 2$. Vi får då

$$f(x, \sqrt{1 - (x-1)^2}) = (x-1)^2 + 7(\sqrt{1 - (x-1)^2})^2 - 1 = 6 - 6(x-1)^2.$$

Den enda stationära punkten för $6 - 6(x-1)^2$ (som funktion av en variabel) är 1, och detta ligger på intervallet $0 < x < 2$. Detta motsvarar $(x, y) = (1, 1)$ och $f(1, 1) = 6$.

På linjen får vi

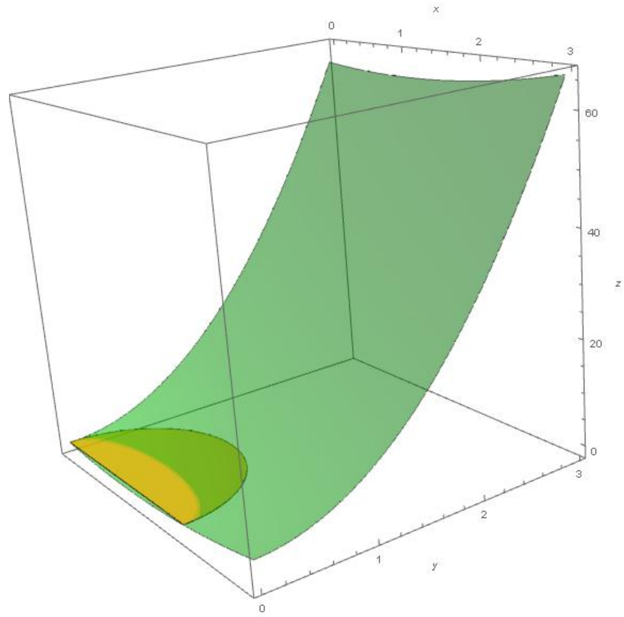
$$f(x, 0) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 2.$$

Här får vi en stationär punkt i 1 och $f(1, 0) = -1$.

Slutligen har vi värdena i hörnpunkterna: $f(0, 0) = 0$ och $f(2, 0) = 0$.

Det minsta av dessa (notera att vi redan sagt att f inte har något globalt max, vi letar nu bara efter min) är -1 och detta värde antas i $(1, 0)$.

Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 4$ och den gröna grafen till $f(x, y)$.



Exempel 3.2. Bestäm största och minsta värdet (om de finns) av $f(x, y) = \frac{3x-4}{(x-2y)^2+1}$ då $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

Lösning: Längs strålen $x = 2y$, $y \geq 0$, gäller $f(x, y) = f(2y, y) = 6y - 4 \to \infty$ då $y \to \infty$, så största värde saknas.

Vidare, då $x \geq 0$ och $y \geq 0$ får vi

$$f(x, y) = \frac{3x - 4}{(x - 2y)^2 + 1} \overset{(1)}{\geq} \frac{-4}{(x - 2y)^2 + 1} \overset{(2)}{\geq} \frac{-4}{0 + 1} = -4$$

och vi har likhet i (1) precis då $x = 0$ och i (2) precis då $x - 2y = 0$, d.v.s. vi har $f(x, y) \geq -4$ med likhet precis då $(x, y) = (0, 0)$.

Svar: $f_{\max}$ existerar ej medan $f_{\min} = f(0, 0) = -4$.

4 Optimering med bivillkor

Här antar vi att vi har en given mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ och reellvärda funktioner $f, g_1, g_2, \ldots, g_k$ som är kontinuerliga på M och av klass $\mathcal{C}^1$ i M^o.

Ibland kallas begränsningen att $\bar{x} \in D$ också för ett bivillkor, och det är egentligen samma bivillkor vi kommer ha här med. Det som utmärker detta kapitel är formen på D. Vi kommer här anta att D, förutom att ligga i M, ges av ett antal ekvationer (bivillkor):

$$D = \{\bar{x} \in M : g_1(\bar{x}) = c_1, g_2(\bar{x}) = c_2, \ldots, g_k(\bar{x}) = c_k\}.$$

Vad vi är ute efter är att få fram ett nödvändigt villkor för en inre punkt $\bar{a} \in M^o$ som ligger på D att kunna vara en lokal extrempunkt för f över D, som generaliserar det för fallet utan bivillkor (som är att $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$). I en sådan inre punkt är alltså D lokalt snittet mellan nivåytorna $g_j = c_j$.

Denna typ av bivillkor kan dyka upp på flera sätt. Till exempel, som vi ska se nedan, ger det ett alternativ till parametriseringsmetoden vi använt oss av ovan. I praktiska problem dyker denna typ av villkor upp på grund av att alla variabler i ett problem ofta inte kan betraktas som helt oberoende av varandra. Till exempel, om vi låter U, I och R beteckna spänning, strömstyrka respektive resistans så kan givetvis varje sådan var för sig varieras, men bara på ett sådant sätt att Ohm's lag $U = RI$ är uppfylld.

I ett så pass enkelt fall som detta kan vi förstås bara ersätta U med RI överallt (vilket motsvarar vad vi gjorde med parametriseringsmetoden ovan), men om vi har ett problem där förhållandena är mer komplicerade så kan det vara omöjligt att explicit göra en motsvarande parametrisering. Det är värt att jämföra med implicita funktionssatsen, där vi har verktyg som garanterar att en parametrisering **rent teoretiskt** existerar, men ofta kan vi inte göra den explicit.

Metoderna vi utvecklar nedan bygger inte på att vi kan göra en explicit parametrisering, så de är i praktiken mer generella än parametriseringmetoden.

Vi kallar

$$g_1(\bar{x}) = c_1, g_2(\bar{x}) = c_2, \ldots, g_k(\bar{x}) = c_k$$

bivillkor.

Vi kommer främst fokusera på de tre fallen med ett bivillkor i två dimensioner, ett bivillkor i tre dimensioner samt två bivillkor i tre dimensioner, så vi börjar med att diskutera dessa var och ett för sig innan vi formulerar det allmänna resultatet.

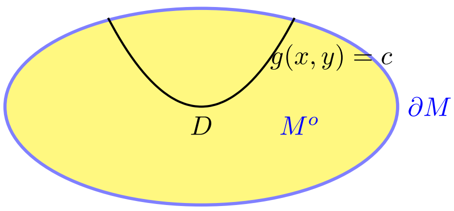
4.1 Ett bivillkor i två dimensioner

Låt

$$D = \{(x, y) \in M : g(x, y) = c\},$$

och antag att $g : M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ är av klass $\mathcal{C}^1$ i M^o.

Vi har ett exempel på en sådan mängd D nedan. Här är M en ellipsskiva, och mängden D är snittet mellan denna skiva och nivåkurvan $g(x, y) = c$ (i detta fall $x^2 - y = 0$).



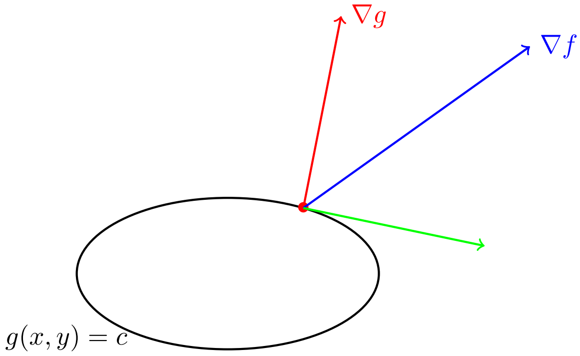
Vi är intresserad av att hitta ett **nödvändigt** villkor på en punkt för att vara en lokal extrempunkt om den ligger i M^o. Notera alltså att det inte kommer gå att tillämpa i de punkter på D som ligger på ∂M i figuren.

Sats 4.1
Låt
$$D = \{(x, y) \in M : g(x, y) = c\},$$
och antag att $g : M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ *är av klass* $\mathcal{C}^1$ *i* M^o. *Då gäller att om* $f : D \to \mathbb{R}$ *har en lokal extrempunkt över* D *i* $(a, b) \in M^o$ *så är* $\nabla f(a, b), \nabla g(a, b)$ *linjärt beroende.*

Villkoret att vektorerna $\nabla f(a, b), \nabla g(a, b)$ är linjärt beroende kan formuleras som att antingen $\nabla g(a, b) = 0$ eller så finns det λ sådant att $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$. Detta kallas **Lagranges multiplikatormetod**, och λ kallas en **Lagrangemultiplikator**.

Det är även ekvivalent med att determinanten av matrisen vi får om vi sätter in de två vektorerna i raderna i en matris (som i detta fall blir en 2×2-matris) är noll.

För att förklara varför detta gäller kan vi studera nedanstående bild. Givet en punkt på kurvan $g(x, y) = c$ (i bilden nedan har vi $g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$), vi vet då att ∇g är ortogonal mot kurvan som i figuren. Om nu ∇f pekade som nedan, då skulle riktningsderivatan i den tangentiella riktningen, givet av den gröna vektorn, i detta fall vara positiv. Alltså växer f lokalt när vi går i den riktningen längs kurvan (som ju lokalt är nästan en rät linje), och avtar i den motsatta riktningen. Alltså kan vi inte ha ett lokalt extremvärde här.



Om vi vill ha ett mer formellt argument, notera att enligt implicita funktionssatsen, om $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$ då är nivåkurvan $g = c$ verkligen lokalt en kurva som vi kan parametrisera som $\bar{x}(t)$ där $\bar{x}(0) = (a, b)$. Nu gäller enligt kedjeregeln
$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) = \nabla f(\bar{x}(t)) \bullet \bar{x}'(t).$$
Om f har en lokal extrempunkt över kurvan i (a, b) måste denna derivata vara noll då $t = 0$, och alltså är $\nabla f(\bar{x}(0))$ ortogonal mot $\bar{x}'(0)$. Den senare pekar å andra sidan i kurvans tangentriktning, och eftersom $\nabla g(a, b) = \nabla g(\bar{x}(0))$ pekar i normalriktningen måste ∇f och ∇g vara parallella i punkten.

Vi kan till exempel använda detta resultat istället för parametriseringen om vi löser problem som det i exempel 2.2 ovan. Nedan ska vi titta på linjen $L_1 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < y < 4, x = 0\}$ från det exemplet tillsammans med dess ändpunkter. Det motsvarar nedanstående problem (notera alltså att D nedan är L_1 tillsammans med ändpunkterna $(0, -1)$ och $(0, 4)$). *Anledningen till att vi tar med ändpunkterna här är att det är svårt att formulera en vettig uppgift utan dessa med tanke på att vi bara har ett nödvändigt villkor på våra lokala extrempunkter som svarar mot att vara en stationär punkt i fallet utan bivillkor. Notera dock att det vi kommer fram till nedan med Lagranges multiplikatormetod är att enda kandidaten för att vara en lokal extrempunkt till* $f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$ *över* L_1 *är* $(0, 0)$, *precis som vi gjorde med parametriseringen tidigare.*

Exempel 4.2. Låt $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 4\}$ och $D = \{(x, y) \in M : x = 0\}$. Bestäm max och min till $f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$ över D.

Lösning: Bivillkoret är $g(x, y) = x = 0$. Alltså gäller $\nabla g(x, y) = (1, 0)$. Å andra sidan har vi $\nabla f(x, y) = (2x - 2, -3y^2)$. De enda kandidaterna för lokala extrempunkter på D som ligger i M^o (dvs sådana att $-1 < y < 4$) är därför de (x, y) som för något λ uppfyller:

$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda \cdot 1 = \lambda, \\ -3y^2 = \lambda \cdot 0 = 0, \\ x = 0, \\ -1 < y < 4. \end{cases}$$

Ovan är de två första ekvationerna ekvivalent med $\nabla f = \lambda \nabla g$, och de två sista är villkor som säger att punkten ligger i $D \cap M^o$. Vi ser nu direkt att enda möjligheten är $y = 0$, $x = 0$ (och $\lambda = -2$), det vill säga punkten $(0, 0)$. Detta ger värdet $f(0, 0) = 0$. Vidare har vi två punkter på $D \cap \partial M$, nämligen $(0, -1)$ och $(0, 4)$, som också är kandidater: $f(0, -1) = 1$, $f(0, 4) = -64$. Så största värdet är 1 vilket antas i $(0, -1)$ och minsta värdet är -64 som antas i $(0, 4)$.

Exempel 4.3. Bestäm största och minsta värde, om de antas, till $f(x, y) = x^2 + x^3 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$.

Lösning: Notera att mängden $g(x, y) = 4$ är en cirkel (med radie 2 och centrum i origo). Detta är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde kommer antas. *(Det kan också vara värt att notera att med denna uppgiftsformulering menar vi att vi med ovanstående notation ska ta $M = \mathbb{R}^2$.)*

Vi har

$$\nabla f(x, y) = (2x + 3x^2, 2y),$$

och

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Vi ser att $\nabla g \neq 0$ på $x^2 + y^2 = 4$. Enligt ovanstående är då enda möjligheten för max/min att dessa antas i punkter (x, y) sådana att

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \text{ för något } \lambda.$$

Detta leder till ekvationssystemet:

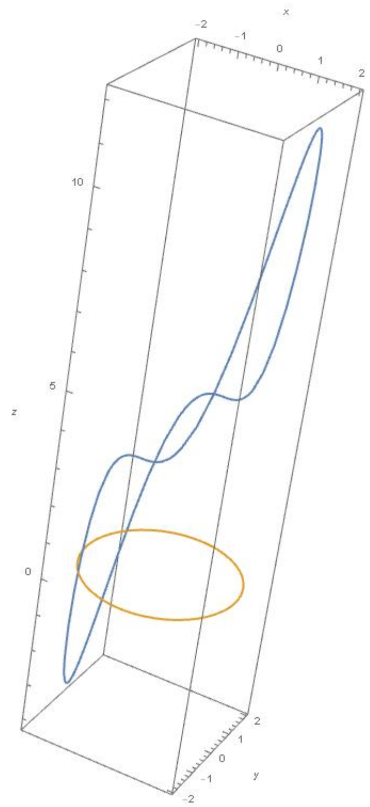
$$\begin{cases} 2x + 3x^2 & = \lambda \cdot 2x \\ 2y & = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 & = 4, \end{cases}$$

där det sista villkoret är för att punkten ska uppfylla vårt bivillkor. Vi ser här att enda möjligheten är $\lambda = 1$ och $2x + 3x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$, eller $y = 0$. Det första fallet leder till $y = \pm 2$ enligt tredje raden, och det andra till $x = \pm 2$ enligt tredje raden. Det vill säga vi har kandidaterna $(0, \pm 2)$ och $(\pm 2, 0)$. Vi kollar nu de fyra värdena

$$f(0, 2) = 4, \quad f(0, -2) = 4, \quad f(2, 0) = 12, \quad f(-2, 0) = -4.$$

Det största värdet som $f(x, y)$ antar på mängden $g(x, y) = 4$ är således 12 som antas i punkten $(2, 0)$ och det minsta -4 som antas i $(-2, 0)$.

Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område (dvs kurva) $g(x, y) = 4$ och den gröna grafen till $f(x, y)$ över detta område.



4.2 Ett bivillkor i tre dimensioner

Sats 4.4
Låt

$$D = \{(x, y, z) \in M : g(x, y, z) = k\},$$

och antag att $g : M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ *är av klass* $\mathcal{C}^1$ *i* M^o. *Då gäller att om* $f : D \to \mathbb{R}$ *har en lokal extrempunkt över* D *i* $(a, b, c) \in M^o$ *då är* $\nabla f(a, b, c), \nabla g(a, b, c)$ *linjärt beroende.*

Villkoret att vektorerna $\nabla f(a, b, c), \nabla g(a, b, c)$ är linjärt beroende kan formuleras som att antingen $\nabla g(a, b, c) = 0$ eller så finns det λ sådant att $\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c)$. Detta kallas **Lagranges multiplikatormetod**, och λ kallas en **Lagrangemultiplikator**.

Det är även ekvivalent med att kryssprodukten mellan de två vektorerna är noll.

Argumentet för detta är i princip identiskt med det för två variabler, men istället för en kurva har vi nu en nivåyta istället.

Vi kan använda denna metod när vi behandlar de två ytorna i exempel 2.3 ovan, istället för att parametrisera. Till exempel när vi studerar den del av randen som ges av $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < 1$, notera att den första ekvationen är samma som att $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$. Precis som i föregående sektion är det dock svårt att formulera en vettig uppgift för ytan utan toppcirkeln, då vi bara har ett nödvändigt villkor för att vara en lokal extrempunkt. Vi lägger därför till denna och ser på följande problem.

Exempel 4.5. Låt $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\}$. Bestäm största och minsta värdet till $f(x,y,z) = x^2 + yz$ över

$$D = \{(x,y,z) \in M : z = x^2 + y^2\}.$$

Lösning: Vi har att $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ uppfyller $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$, $\nabla f(x,y,z) = (2x, z, y)$, så enligt ovanstående är enda möjligheten för en lokal extrempunkt över D punkter sådana att

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x, \\ z = \lambda \cdot 2y, \\ y = \lambda \cdot (-1), \\ z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 < 1, \end{cases}$$

där de två sista raderna är våra bivillkor. Om $\lambda = 0$ får vi $x = y = 0$ från den första respektive tredje ekvationen, vilket i sin tur ger $z = 0$. Så en kandidat är $(0,0,0)$. $\lambda = 1$ ger å andra sidan att $y = z/2 = -1$ som motsäger den fjärde ekvationen. Om $\lambda \neq 0, 1$ ger den första ekvationen att $x = 0$, och vi har nu $y = -\lambda$, $z = 2\lambda y = -2\lambda^2$, som återigen ger motsägelse då z inte kan vara negativt enligt den fjärde ekvationen. Alltså är enda kandidaten för en punkt i M^o att vara en lokal extrempunkt till f över D punkten $(0,0,0)$. Vi har vidare $f(0,0,0) = 0$.

Punkterna på $\partial M \cap D$ är precis cirkeln $z = x^2 + y^2 = 1$. Vi kan givetvis behandla denna som i exempel 2.3, men vi ska i nästa sektion se hur vi kan behandla detta med bivillkorsmetoden också. Så fortsättning följer.

4.3 Två bivillkor i tre dimensioner

Sats 4.6
Om vi har

$$D = \{(x,y,z) \in M : g(x,y,z) = k, h(x,y,z) = l\}$$

och antag att $g : M \to \mathbb{R}$,$h : M \to \mathbb{R}$ och $f : M \to \mathbb{R}$ är av klass $\mathcal{C}^1$ i M^o. Då gäller att om $f : D \to \mathbb{R}$ har en lokal extrempunkt över D i $(a,b,c) \in M^o$ då är vektorerna $\nabla f(a,b,c), \nabla g(a,b,c), \nabla h(a,b,c)$ linjärt beroende.

Villkoret att vektorerna $\nabla f(a,b,c), \nabla g(a,b,c), \nabla h(a,b,c)$ är linjärt beroende kan formuleras som att antingen $\nabla g(a,b,c), \nabla h(a,b,c)$ är linjärt beroende, eller så finns λ_1, λ_2 sådana att $\nabla f(a,b,c) = \lambda_1 \nabla g(a,b,c) + \lambda_2 \nabla h(a,b,c)$. Detta kallas **Lagranges multiplikatormetod**, och λ_1, λ_2 kallas **Lagrangemultiplikatorer**.

Det är även ekvivalent med att determinanten av matrisen vi får om vi sätter in de tre vektorerna i raderna i en matris (som i detta fall blir en 3×3-matris) är noll.

För att förstå varför detta gäller så påminner vi om att ifall $\nabla g(a,b,c)$ och $\nabla h(a,b,c)$ inte är linjärt beroende, då säger implicita funktionssatsen att mängden där $g(x,y,z) = k$ och $h(x,y,z) = l$ lokalt kring (a,b,c) är en parameterkurva $\bar{x}(t)$ där $(a,b,c) = \bar{x}(0)$. Notera nu att om f har en lokal extrempunkt över denna i $\bar{x}(0)$ då gäller att

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) = \nabla f(\bar{x}(t)) \bullet \bar{x}'(t)$$

är noll i $t = 0$. Vi noterar nu att vektorn $\bar{x}'(0)$ pekar i tangentriktningen till kurvan, och detta säger alltså att $\nabla f(a,b,c)$ är ortogonal mot tangentriktningen. Men detta gäller även för båda vektorerna $\nabla g(a,b,c)$ och $\nabla h(a,b,c)$ också. Eftersom dessa är linjärt oberoende betyder det att $\nabla f(a,b,c)$ ligger i det plan dessa två spänner upp, vilket precis betyder att $\nabla f(a,b,c) = \lambda_1 \nabla g(a,b,c) + \lambda_2 \nabla h(a,b,c)$ för några λ_1, λ_2.

Vi kan slutföra exempel 4.5 ovan och behandla cirkeln $z = x^2 + y^2 = 1$. Detta motsvarar följande problem:

Exempel 4.7. Låt $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z = 1\}$. Bestäm största och minsta värdet till $f(x, y, z) = x^2 + yz$ över D.

Lösning: Med $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ och $h(x, y, z) = z$ har vi $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ och $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Dessa är förstås linjärt oberoende (på D), så enda möjligheten för en lokal extrempunkt på D är att $\nabla f(x, y, z) = (2x, z, y) = \lambda_1 \nabla g(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h(x, y, z)$, vilket ger oss ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 0, \\ z &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ y &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ z &= x^2 + y^2, \\ z &= 1, \end{cases}$$

Där de två sista ekvationerna är bivillkoren. Enligt den första ekvationen måste antingen $x = 0$ eller $\lambda_1 = 1$. I det första fallet får vi $y = \pm 1$ och $z = 1$ från den sista raden (ekvation 2 och 3 kan vi alltid uppfylla). Detta ger punkterna $(0, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$. Om å andra sidan $\lambda_1 = 1$, då får vi $z = 2y = 1$ från den andra och fjärde raden. Den fjärde raden ger nu $1 = x^2 + (1/2)^2$ vilket ger punkterna $(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ och $(\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$. Vi har

$$f(0, 1, 1) = 1, \quad f(0, -1, 1) = -1, \quad f(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}, \quad f(\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}.$$

Vi ser alltså att bland alla våra kandidater för globala extrempunkter så har vi maximum $5/4$ i $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ och minimum -1 i $(0, -1, 1)$.

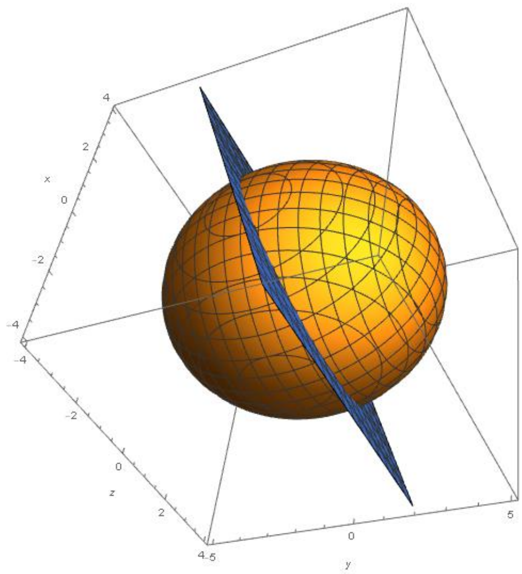
I nedanstående två exempel kommer vi få både optimering med ett och två bivillkor i tre dimensioner.

Exempel 4.8. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av

$$x + 2y + z$$

då $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 20$ och $x + 2y \geq 0$.

Lösning: Bivillkoret $g(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 20$ tillsammans med begränsningen $h(x, y) = x + 2y \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en sluten ellipsoid (alltså en kompakt mängd) och målfunktionen $f(x, y) = x + 2y + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.



Vi får $\nabla f = (1, 2, 1)$, $\nabla g = (4x, 2y, 4z)$ och $\nabla h = (1, 2, 0)$. Kandidatjakt:

- Kandidater på ytan $g = 20$ och $h > 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. när $\nabla f \times \nabla g = 0$:

$$0 = \nabla f \times \nabla g = (8z - 2y, 4x - 4z, 2y - 8x) \;\Leftrightarrow\; z = x \;\text{ och }\; y = 4x$$

  Insättning i $g = 20$ ger $20x^2 = 20$, d.v.s. $x = \pm 1$. Det första alternativet $x = -1$ ger $(-1, -4, -1)$ med $h = -9 < 0$, uppfyller inte kravet $h > 0$. Det andra alternativet ger punkten $(1, 4, 1)$ med $h = 9 > 0$, och kandidaten blir $f(1, 4, 1) = 10$.

- Kandidater på kurvan $g = 20$ och $h = 0$ finns där $\nabla f, \nabla g$ och ∇h är linjärt beroende, d.v.s. där determinanten

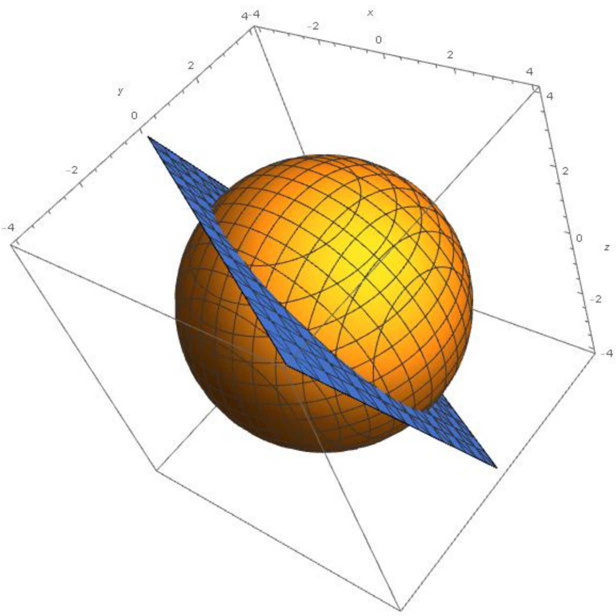
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4x & 2y & 4z \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8x - 2y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = 4x,$$

  och $h = 0$ ger $x = -2y$, alltså $x = y = 0$, vilket ger med hjälp av $g = 20$: $2z^2 = 20 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{10}$. Vi har två kandidater: $f(0, 0, \sqrt{10}) = \sqrt{10}$ och $f(0, 0, -\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$.

  Svar. $f_{max} = f(1, 4, 1) = 10$ och $f_{min} = f(0, 0, -\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$

Exempel 4.9. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$ på den mängd där $x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $x + 2y + z \geq 0$.

Lösning: Bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $h(x, y, z) = x + 2y + z \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av ett slutet klot – i själva verket ett slutet halvklot – och alltså en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde.



Vi får $\nabla f = (2x - 2, 2y - 2, 2z - 2)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (1, 2, 1)$. Kandidatjakt:

- $\dim 3$ ($g < 12$, $h > 0$): $\nabla f = 0$ ger kandidaten $f(1, 1, 1) = -3$.
- $\dim 2$, består av två delar:
  - ($g = 12, h > 0$): $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow x = y = z$, som insatt i $g = 12$ ger kandidaten $f(2, 2, 2) = 0$. (Punkten $(-2, -2, -2)$ ligger utanför mängden.)
  - ($g < 12, h = 0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 2 = 2z - 2$, alltså $y = 2x - 1, z = x$, som insatt i $h = 0$ ger kandidaten $f(1/3, -1/3, 1/3) = -1/3$.

- dim 1 ($g = 12, h = 0$): $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow z = x$, som insatt i $g = 12$ och $h = 0$ ger kandidaterna $f(2, -2, 2) = 8$ och $f(-2, 2, -2) = 16$.
- dim 0: tomt.

Sammantaget blir
Svar: $f_{\max} = f(-2, 2, -2) = 16$ och $f_{\min} = f(1, 1, 1) = -3$.

4.4 Det allmänna fallet

Sats 4.10
Antag att funktionerna $f, g_1, g_2, \ldots, g_k$ alla är av klass $\mathcal{C}^1$ i M^o. Om

$$D = \{\bar{x} \in M : g_1(\bar{x}) = c_1, g_2(\bar{x}) = c_2, \ldots, g_k(\bar{x}) = c_k\},$$

och f har en lokal extrempunkt över D i $\bar{a} \in M^o$, då är vektorerna

$$\nabla f(\bar{a}), \nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots, \nabla g_k(\bar{a})$$

linjärt beroende.

Parametrarna λ_i ovan brukar kallas **Lagrangemultiplikatorer**.

Kravet att vektorerna

$$\nabla f(\bar{a}), \nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots, \nabla g_k(\bar{a})$$

är linjärt beroende kan formuleras som att antingen $\nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots, \nabla g_k(\bar{a})$ är linjärt beroende, eller så finns $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sådana att

$$\nabla f(\bar{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{a}) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{a}).$$

Detta kallas **Lagranges multiplikatormetod**, och parametrarna λ_i ovan brukar kallas **Lagrangemultiplikatorer**.

Vi påpekar också att det i vissa fall finns andra sätt än via Lagranges multiplikatormetod att kolla om vektorer är linjärt beroende, som ibland kan vara enklare. Till exempel via determinanter.

Det kan slutligen vara värt att påpeka att om $\nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots, \nabla g_k(\bar{a})$ är linjärt oberoende, då blir villkoret att $\nabla f(\bar{a}), \nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots, \nabla g_k(\bar{a})$ är linjärt beroende (som vi förklarade för de tre huvudfallen ovan) helt enkelt att riktningsderivatorna av f i alla riktningar som "tangerar" D i punkten ska vara noll, vilket om man tänker efter lite är en naturlig generalisering av att ha gradient noll om vi inte har några bivillkor. Det vill säga det är en naturlig generalisering av att vara en stationär punkt.