Exempel

Beräkna

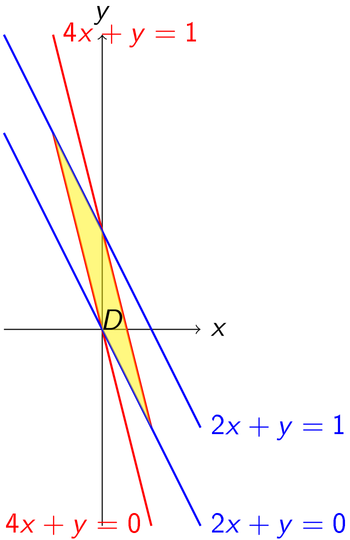
$$\iint_D (4x + y)\sin(2x + y)dxdy$$

där

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.

(b) D är parallellogrammet med hörn i $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$.

Lösning (a)



Lösning (a)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le 2x + y \le 1, 0 \le 4x + y \le 1\}.$$

Lösning (a)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}.$
Låt $u = 2x + y,\ v = 4x + y.$

Lösning (a)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

Lösning (a)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Lösning (a)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösning (a)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

Lösning (a)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

$$dxdy = \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv$$

Lösning (a)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

$$dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv = \left| \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right|^{-1} dudv$$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x + y \leq 1, 0 \leq 4x + y \leq 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$.

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

$$dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv = \left| \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right|^{-1} dudv = \frac{1}{2} dudv.$$

Lösning (a)

Med $\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ gäller:

Lösning (a)

Med $\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ gäller:

$$\iint_D (4x + y)\sin(2x + y)dxdy = \iint_\Omega (v \sin u)\frac{1}{2}dudv$$

Lösning (a)

Med $\Omega = \{(u,v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ gäller:

$$\iint_D (4x+y)\sin(2x+y)dxdy = \iint_\Omega (v \sin u)\frac{1}{2}dudv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 v \sin u \, du\right) dv$$

Lösning (a)

Med $\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ gäller:

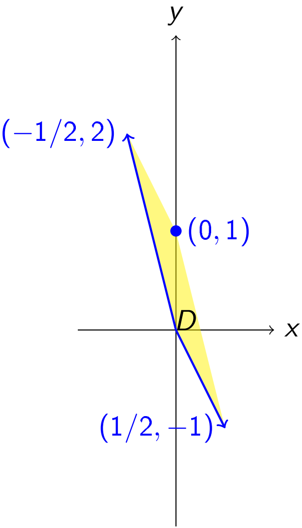
$$\iint_D (4x + y)\sin(2x + y)dxdy = \iint_\Omega (v \sin u)\frac{1}{2}dudv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 v \sin u \, du\right) dv = \frac{1}{2}\int_0^1 [-v \cos u]_{u=0}^1 \, dv$$

Lösning (a)

Med $\Omega = \{(u,v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ gäller:

$$\iint_D (4x+y)\sin(2x+y)dxdy = \iint_\Omega (v\sin u)\frac{1}{2}dudv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 v\sin u\,du\right) dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-v\cos u\right]_{u=0}^1 dv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 v(1-\cos 1)dv = \frac{1-\cos 1}{4}.$$

Lösning (b)



Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.

Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= 4x + y. \end{cases}$$

Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= 4x + y. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ respektive $(1, 0)$ i uv-planet.

Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u & = & 2x + y \\ v & = & 4x + y. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ respektive $(1, 0)$ i uv-planet.Alltså transformeras D till parallellogrammet i uv-planet med hörn i dessa punkter, vilket helt enkelt är området som ges av $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

Lösning (b)

Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas.D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u & = & 2x + y \\ v & = & 4x + y. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ respektive $(1, 0)$ i uv-planet.Alltså transformeras D till parallellogrammet i uv-planet med hörn i dessa punkter, vilket helt enkelt är området som ges av $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.Efter detta kan vi fortsätta som i (a)-uppgiften för att beräkna integralen (som ju alltså är samma som i denna).