Exempel

Beräkna

$$\iint_D x^2 dxdy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$

Lösning: Alternativ 1

Vi gör ett linjärt variabelbyte först följt av införande av polära koordinater.

Lösning: Alternativ 1

Vi gör ett linjärt variabelbyte först följt av införande av polära koordinater.

$x = 3u, \quad y = 4v$ ger att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{(3u)^2}{9} + \frac{(4v)^2}{16} = u^2 + v^2 \leq 1.$$

Lösning: Alternativ 1

Vi gör ett linjärt variabelbyte först följt av införande av polära koordinater.

$x = 3u, \quad y = 4v$ ger att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{(3u)^2}{9} + \frac{(4v)^2}{16} = u^2 + v^2 \leq 1.$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv =$$

$$/u = \rho \cos\varphi, v = \rho \sin\varphi/$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv =$$

$$/u = \rho \cos\varphi, v = \rho \sin\varphi/ \; = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 108\rho^2 \cos^2 \varphi \rho d\rho \right) d\varphi$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv =$$

$$/u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi/ \; = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 108\rho^2\cos^2\varphi\rho d\rho\right) d\varphi =$$

$$108\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv =$$

$$/u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi/ \ = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 108\rho^2 \cos^2\varphi \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$108 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho = \Big/ \cos^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} \Big/$$

Lösning: Alternativ 1

Med $\Omega = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12 dudv =$$

$$/u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi/ \; = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 108\rho^2\cos^2\varphi\rho d\rho\right) d\varphi =$$

$$108\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho = \Big/ \cos^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} \Big/ =$$

$$\ldots = \frac{108\pi}{4}.$$

Lösning: Alternativ 2

Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Lösning: Alternativ 2

Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

och får då i dessa att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{16\rho^2\sin^2\varphi}{16} = \rho^2 \leq 1.$$

Lösning: Alternativ 2

Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

och får då i dessa att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{16\rho^2\sin^2\varphi}{16} = \rho^2 \leq 1.$$

I detta fall gäller

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi \\ 4\sin\varphi & 4\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 12\rho.$$

Lösning: Alternativ 2

Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

och får då i dessa att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{16\rho^2\sin^2\varphi}{16} = \rho^2 \leq 1.$$

I detta fall gäller

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi \\ 4\sin\varphi & 4\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 12\rho.$$

Gränserna blir nu $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

Lösning: Alternativ 2

Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

och får då i dessa att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{16\rho^2\sin^2\varphi}{16} = \rho^2 \leq 1.$$

I detta fall gäller

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi \\ 4\sin\varphi & 4\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 12\rho.$$

Gränserna blir nu $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,vilket direkt ger oss integralen

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 9\rho^2\cos^2\varphi 12\rho d\rho \right) d\varphi = \ldots = \frac{108\pi}{4}.$$