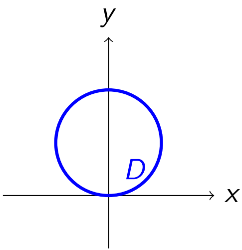
# Exempel

Beräkna

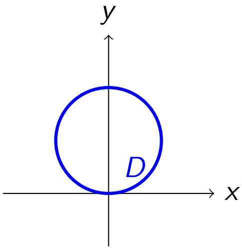
$$\iint_D y dx dy$$

där $D$ är cirkelskivan med centrum i $(0, 1)$ och radie 1.

# Lösning



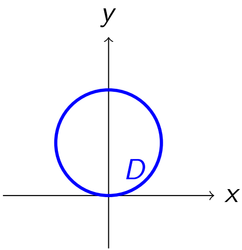
# Lösning




I $xy$-koordinater ges $D$ av olikheten

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

# Lösning

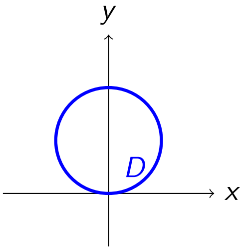



I $xy$-koordinater ges $D$ av olikheten

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

I polära koordinater ges området av

$\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 1)^2$



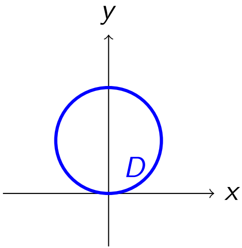

I $xy$-koordinater ges $D$ av olikheten

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

I polära koordinater ges området av

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 1)^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi + 1 \leq 1.$$

# Lösning




I $xy$-koordinater ges $D$ av olikheten

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

I polära koordinater ges området av

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 1)^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi + 1 \leq 1.$$

Detta är samma sak som att

$$\rho^2 \leq 2\rho \sin \varphi \Leftrightarrow \rho \leq 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

# Lösning, alternativ 1:

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\sin\varphi} \rho \sin\varphi \rho d\rho \right) d\varphi$$

# Lösning, alternativ 1:

$$\iint_D ydxdy = \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\sin\varphi} \rho \sin\varphi \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \left[ \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right]_{\rho=0}^{2\sin\varphi} d\varphi$$

# Lösning, alternativ 1:

$$\iint_D ydxdy = \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\sin\varphi} \rho \sin\varphi \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \left[ \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right]_{\rho=0}^{2\sin\varphi} d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{8\sin^4\varphi}{3} d\varphi = \ldots = \pi.$$

# Lösning, alternativ 2:

Vi kan även istället byta koordinater till

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = 1 + \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

# Lösning, alternativ 2:

Vi kan även istället byta koordinater till

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = 1 + \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Då ges $D$ av $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

# Lösning, alternativ 2:

Vi kan även istället byta koordinater till

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = 1 + \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Då ges $D$ av $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\iint_D y \, dxdy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (1 + \rho \sin \varphi)\rho \, d\rho \right) \, d\varphi = \ldots = \pi.$$