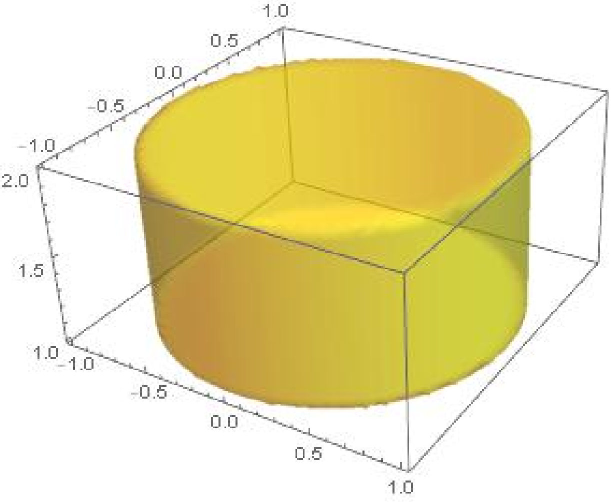
Exempel

Beräkna

$$\iiint_D z e^{x^2+y^2}\, dxdydz$$

där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.

Bild av D



Lösning

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dz \right) dxdy$$

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dz \right) dxdy =$$
$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dxdy \cdot \int_1^2 zdz$$

Lösning

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dz\right) dxdy =$$
$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy \cdot \int_1^2 zdz = /\ \text{Polära koordinater}/$$

Lösning

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dz\right) dxdy =$$
$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy \cdot \int_1^2 zdz = /\ \text{Polära koordinater}/\ =$$
$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\mathrm{e}^{\rho^2}\,d\rho\right) d\varphi$$

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$1 \leq z \leq 2$.

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dz \right) dxdy =$$
$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dxdy \cdot \int_1^2 zdz = /\ \text{Polära koordinater}/\ =$$
$$\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\mathrm{e}^{\rho^2}\, d\rho \right) d\varphi = \ldots = 3\pi \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$