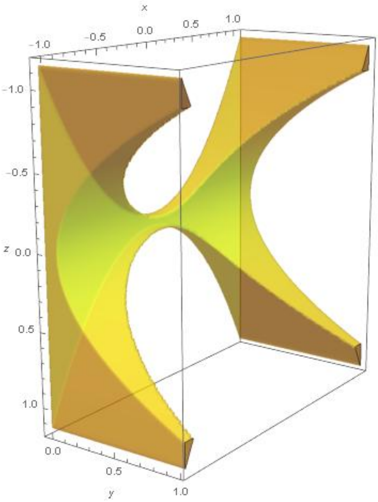
# Exempel

Beräkna

$$\iiint_D x^2 dxdydz$$

där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}.$

# Bild av $D$



# Lösning: Alt 1

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}.$$

# Lösning: Alt 1

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}.$
Tvärsnittet av $D$ för ett fixt $x$ (projicerat på $yz$-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \le y \le z^2 \le x^4\}$$

# Lösning: Alt 1

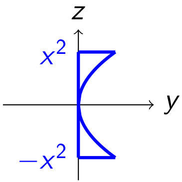
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}.$
Tvärsnittet av $D$ för ett fixt $x$ (projicerat på $yz$-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4\} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2, -x^2 \leq z \leq x^2\}.$$

# Lösning: Alt 1

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}$.
Tvärsnittet av $D$ för ett fixt $x$ (projicerat på $yz$-planet):

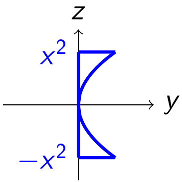
$$D_x = \{(y,z) : 0 \le y \le z^2 \le x^4\} = \{(y,z) : 0 \le y \le z^2, -x^2 \le z \le x^2\}.$$



# Lösning: Alt 1

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.
Tvärsnittet av $D$ för ett fixt $x$ (projicerat på $yz$-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4\} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2, -x^2 \leq z \leq x^2\}.$$




D.v.s. eftersom $0 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$:

$$D = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, (y, z) \in D_x\}.$$

# Lösning: Alt 1

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left( \iint_{D_x} x^2 dydz \right) dx$$

# Lösning: Alt 1

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left( \iint_{D_x} x^2 dydz \right) dx =$$
$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx$$

# Lösning: Alt 1

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left( \iint_{D_x} x^2 dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx$$

# Lösning: Alt 1

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left( \iint_{D_x} x^2 dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^2 z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2}$$

# Lösning: Alt 1

$$\iiint_D x^2\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{D_x} x^2\,dydz\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x^2}^{x^2}\left(\int_0^{z^2} x^2\,dy\right)dz\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x^2}^{x^2} x^2z^2\,dz\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2z^3}{3}\right]_{z=-x^2}^{x^2} = \int_{-1}^{1}\frac{2x^8}{3}dx = \frac{4}{27}$$

# Lösning: Alt 2

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}.$$

# Lösning: Alt 2

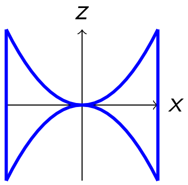
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.Projektionen $\Omega$ av $D$ på $xz$-planet ges av

$$0 \leq z^2 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq z \leq x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

# Lösning: Alt 2

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.Projektionen $\Omega$ av $D$ på $xz$-planet ges av

$$0 \leq z^2 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq z \leq x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

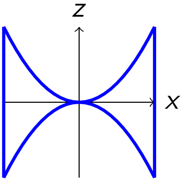



För varje $(x, z) \in \Omega$ ska $y$ uppfylla $0 \leq y \leq z^2$ för att ligga i $D$.

# Lösning: Alt 2

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.Projektionen $\Omega$ av $D$ på $xz$-planet ges av

$$0 \leq z^2 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq z \leq x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$




För varje $(x, z) \in \Omega$ ska $y$ uppfylla $0 \leq y \leq z^2$ för att ligga i $D$.

# Lösning: Alt 2

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_\Omega \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dxdz$$

# Lösning: Alt 2

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_\Omega \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dxdz =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx$$

# Lösning: Alt 2

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_\Omega \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dxdz =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx$$

# Lösning: Alt 2

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_\Omega \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dxdz =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^2 z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2}$$

# Lösning: Alt 2

$$\iiint_D x^2\,dxdydz = \iint_\Omega \left( \int_0^{z^2} x^2\,dy \right) dxdz =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} \left( \int_0^{z^2} x^2\,dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2\,dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[ \frac{x^2 z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2x^8}{3}\,dx = \frac{4}{27}$$