Exempel

Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz.$$

Lösning

Integranden är positiv.

Lösning

Integranden är positiv.
Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med
$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$.

Lösning

Integranden är positiv.

Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med

$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$$

Lösning

Integranden är positiv.
Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med
$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{n} \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta \, dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

Lösning

Integranden är positiv.
Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med
$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{n} \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta dr \right) d\varphi \right) d\theta =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_{1/n}^{n} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr$$

Lösning

Integranden är positiv.
Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med
$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^n \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta dr \right) d\varphi \right) d\theta =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_{1/n}^n \frac{r}{(1+r^2)^2} dr =$$

$$\lim_{n\to\infty} 4\pi \left[\frac{-1}{2(1+r^2)} \right]_{r=1/n}^n$$

Lösning

Integranden är positiv.
Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med
$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{n} \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta dr \right) d\varphi \right) d\theta =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_{1/n}^{n} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr =$$

$$\lim_{n\to\infty} 4\pi \left[\frac{-1}{2(1+r^2)} \right]_{r=1/n}^{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \left(\frac{-1}{(1+n^2)} + \frac{1}{(1+(1/n)^2)} \right) = 2\pi.$$