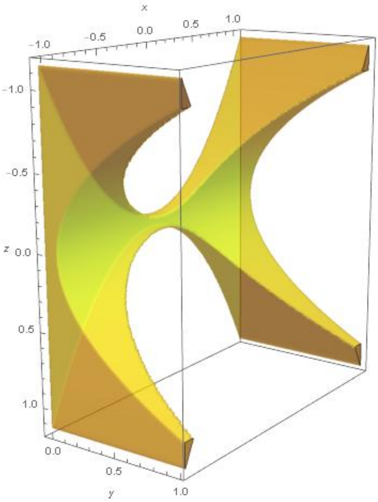
Exempel

Beräkna volymen av området
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.

Bild av D



Lösning

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}.$$

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.

Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4\}$$

Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.
Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

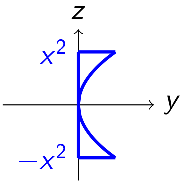
$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4\} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2, -x^2 \leq z \leq x^2\}.$$

Lösning

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}.$$

Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

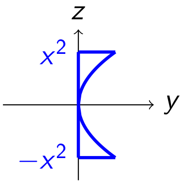
$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4\} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z^2, -x^2 \leq z \leq x^2\}.$$



Lösning

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}$.
Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \le y \le z^2 \le x^4\} = \{(y, z) : 0 \le y \le z^2, -x^2 \le z \le x^2\}.$$



D.v.s. eftersom $0 \le x^4 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$:

$$D = \{(x, y, z) : -1 \le x \le 1, (y, z) \in D_x\}.$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx =$$
$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} dy \right) dz \right) dx$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} z^2 dz \right) dx$$

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} z^2 dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} dx$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} z^2 dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^6}{3} dx = \frac{4}{21}$$