Exempel

Beräkna volymen av tetraedern som avgränsas av planen $x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 0$, $2x + y + 3z = 0$ samt $4x + 4y + 5z = 1$.

Lösning

$$x + y + z = 0,\ x + 2y + z = 0,\ 2x + y + 3z = 0,\ 4x + 4y + 5z = 1.$$

Lösning

$x + y + z = 0,\ x + 2y + z = 0,\ 2x + y + 3z = 0,\ 4x + 4y + 5z = 1.$
Med

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y + z \\ w = 2x + y + 3z \end{cases}$$

får vi

$x + y + z = 0,\ x + 2y + z = 0,\ 2x + y + 3z = 0,\ 4x + 4y + 5z = 1.$
Med

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y + z \\ w = 2x + y + 3z \end{cases}$$

får vi

$$4x + 4y + 5z = u + v + w.$$

Lösning

$x+y+z=0,\ x+2y+z=0,\ 2x+y+3z=0,\ 4x+4y+5z=1.$
Med

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y+z \\ w = 2x+y+3z \end{cases}$$

får vi

$$4x+4y+5z = u+v+w.$$

Så i *uvw*-koordinaterna ges planen av $u=0, v=0,\ w=0$ samt $u+v+w=1$.

Lösning

$x+y+z=0,\ x+2y+z=0,\ 2x+y+3z=0,\ 4x+4y+5z=1.$
Med

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y+z \\ w = 2x+y+3z \end{cases}$$

får vi

$$4x+4y+5z = u+v+w.$$

Så i *uvw*-koordinaterna ges planen av $u=0, v=0,\ w=0$ samt $u+v+w=1$.Det område som dessa begränsar ges av $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1-u$, $0\le w\le 1-u-v$.

Lösning

$x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 0$, $2x + y + 3z = 0$, $4x + 4y + 5z = 1$.
Med

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y + z \\ w = 2x + y + 3z \end{cases}$$

får vi

$$4x + 4y + 5z = u + v + w.$$

Så i *uvw*-koordinaterna ges planen av $u = 0, v = 0$, $w = 0$ samt $u + v + w = 1$.Det område som dessa begränsar ges av $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1 - u$, $0 \leq w \leq 1 - u - v$.

$$dxdydz = \left| \frac{d(x, y, z))}{d(u, v, w)} \right| dudvdw$$

Lösning

$x+y+z=0,\ x+2y+z=0,\ 2x+y+3z=0,\ 4x+4y+5z=1.$
Med

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y+z \\ w = 2x+y+3z \end{cases}$$

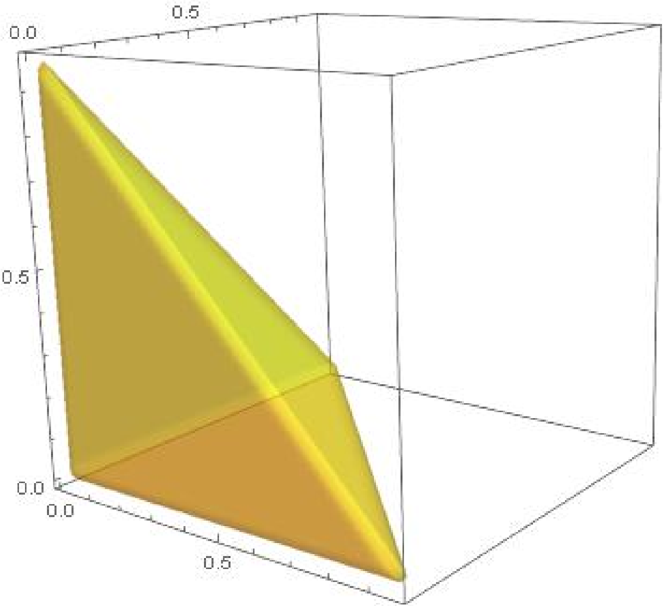
får vi

$$4x+4y+5z = u+v+w.$$

Så i *uvw*-koordinaterna ges planen av $u=0, v=0,\ w=0$ samt $u+v+w=1$.Det område som dessa begränsar ges av $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1-u,\ 0 \le w \le 1-u-v$.

$$dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z))}{d(u,v,w)}\right| dudvdw = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\right|^{-1} dudvdw = dudvdw.$$

Område



Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v) dv \right) du$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v) dv \right) du = \int_0^1 \left[v(1-u) - \frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v) dv \right) du = \int_0^1 \left[v(1-u) - \frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du =$$
$$\int_0^1 \left((1-u)^2 - \frac{(1-u)^2}{2} \right) du$$

Lösning

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)dv \right) du = \int_0^1 \left[v(1-u) - \frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du =$$

$$\int_0^1 \left((1-u)^2 - \frac{(1-u)^2}{2} \right) du = \ldots = \frac{1}{6}$$