Exempel

Bestäm massan och tyngdpunkten till den platta som utgörs av den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten och har densitet given av $\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Lösning

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x, y)\,dxdy$$

Lösning

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Lösning

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho \cdot \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho\right)d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Tyngdpunkten (x_t, y_t) ges av

$$x_t = \frac{\iint_D x\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}, \quad y_t = \frac{\iint_D y\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}.$$

Lösning

I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho\right)d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Tyngdpunkten (x_t, y_t) ges av

$$x_t = \frac{\iint_D x\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}, \quad y_t = \frac{\iint_D y\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}.$$

Av symmetriskäl ser vi att $x_t = y_t$.

Lösning

$$\iint_D x\varrho(x,y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho d\rho\right)d\varphi = \ldots = \frac{1}{4}.$$

Lösning

$$\iint_D x\varrho(x,y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho d\rho\right)d\varphi = \ldots = \frac{1}{4}.$$

Så

$$x_t = y_t = \frac{1/4}{\pi/6} = \frac{3}{2\pi}.$$